

正整数符号の平均符号語長の対エントロピー比の上界と実験値

中村 博文

Upper Bounds of Mean Codeword Lengths versus Entropies on Positive Integer Codes and Actual Ratios

Hirofumi NAKAMURA

(Accepted October 1, 2015)

Abstract A lot of integer codes are proposed for various applications. Many of them can encode information sources of unlimited positive integers. Elias proposed some evaluation methods for the codes in any not increasing probability distributions of positive integer. And, Elias showed many of positive integer codes can encode positive integers in not bad performance for any kind of the probability distributions. By Elias, for some positive integer codes, the upper bound functions of ratios of average codeword lengths versus entropies for any information sources of positive integer are shown. In this paper, we verify the upper bound functions by numerical experiments. Then we show that some of them are roughly optimum, but Elias's upper bound function of Leveshtein-Elias's ω code is redundant. We proposed a revised upper bound function for the code, and show that it gives a better upper bound.

Keywords [Positive integer coding, Universal coding, Mean codeword length, Entropy]

1 はじめに

正整数符号とは、全ての正整数に対して、符号語毎に終端が分かる形で読み取りが可能な異なるビット列を与える符号である。情報源の情報の種類がいくらでも増える場合や、有限であっても情報の種類が膨大な場合に用いられる。多数の正整数符号が提案されているが、多くが、どのような確率分布の情報源に対してもある程度の性能で符号化を行う。

Elias¹⁾によって、いくつかの正整数符号について、任意の情報源のエントロピーに対して平均符号語長がどの程度大きくなるかのひとつの上界が示され、それが時折参照されている。例えば、横尾ら²⁾は情報源拡大での収束性の証明に用いている。

Elias¹⁾は合わせて、平均符号語長のエントロピーとの比が、1以上のエントロピーで定数を超えない性質や、エントロピーが大きくなると定数値に収束する符号の多いことも示している。

後に、文献3)において、実際の上界がEliasの理

論式より格段に小さいのではないかという問いを挙げているが、十分な検証に至っていなかった。

本論文では、できるだけ小さな上界を理論的に得るための糧とすべく、数値実験を交えて上界の範囲を探求する。

文献3)では、研究対象として、Elias¹⁾が扱った符号を網羅していなかった。本論文では、文献3)で扱っている γ 、 δ 、Leveshtein-Elias^{1, 4)}の ω に加え、 ρ_k も対象とする。これらの符号と名前は同じでも、0,1の割り当て方を違えている文献も見られるが、本論文では文献1)に合わせている。

数値実験等の方法は具体的な符号を伴う方が説明しやすいため、最初に取り上げる符号 γ の所で述べている。

2 用いる記号や記法

符号(その一つを仮に C と表す)の、正整数 j の符号語を $C(j)$ 、その長さを $L_C(j)$ のように表す。

符号語長関数を L_C 、または引数の説明を一々述べないために便宜上 $L_C(j)$ のように表す。

$L_C(j)$ に接し、 $L_C(j)$ を下回らない、上に凸な関数を L_C^U または $L_C^U(j)$ のように表す。

確率分布 P での正整数 j の出現確率を $P(j)$ と表す。 $P = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$ である。

出現確率が P に従うときの符号 C の平均符号語長を $E_P(L_C)$ と表す。 $E_P(L_C)$ は

$$E_P(L_C) = \sum_{j=1}^{\infty} P(j)L_C(j) \quad (1)$$

である。出現確率が P に従う情報源のエントロピーを $H(P)$ と表す。 $H(P)$ は

$$H(P) = \sum_{j=1}^{\infty} P(j) \log_2 \frac{1}{P(j)} \quad (2)$$

である。

平均符号語長とエントロピーとの比の評価において、Elias は、 $E_P(L_C^U)$ と $\max\{1, H(P)\}$ を用いた

$$R_C(H(P)) = \frac{E_P(L_C^U)}{\max\{1, H(P)\}} \quad (3)$$

なる関数 $R_C(H(P))$ で評価を行っている。

$E_P(L_C)$ でなく $E_P(L_C^U)$ を用いることで議論を簡単に行っている。また、 $H(P)$ でなく $\max\{1, H(P)\}$ を用いることで、情報毎にビット列で表現する有意な符号では符号語が 1 ビットより短いことがあり得ないことを反映すると共に、エントロピーが特に小さい値での議論が避けられている。以下で簡潔に対エントロピー比というような表現を用いるが、正確には $\max\{1, H(P)\}$ との比である。

3 前提の確認

本論文で任意の確率分布と言うとき、文献 1) 以降多くの符号語長の議論で用いられている

$$P(1) \geq P(2) \geq P(3) \geq \dots \quad (4)$$

を前提とする。もしも与えられた確率分布が最初にこうでなくても、一般に、適当な並べ替えによってこれを満たすことができる。

4 符号 γ について

4.1 符号 γ

符号語 $\gamma(j)^1$ は、 j の通常の 2 進数表現と同じビット数の単進符号と、 j の通常の 2 進数表現から MSB (最上位ビット) を除いた内容を内包している。但し、 $\gamma(j)$ は、これら両者のビットを交互に挟み込んだ表

現が特徴で、単進符号の内容が復号時の処理継続・終了のガイドになる。ここでの単進符号は、符号語の最後が必ず 1 でそれ以外が 0 である。単進符号の部分も約 $\log_2 j$ ビットを要するため、符号語長は $2\log_2 j$ ビット程度になる。

整数 1~7 の符号化の例を Table 1 に示す。分かりやすさのために、 j の通常の 2 進数表現の内、符号語に反映されるビットについて上に線を引いたが、実際の符号語には必要ない。他の符号語例においても同様である。

Table 1 Codeword examples of γ

Integer j	Usual binary number	Unit code part	Codeword $\gamma(j)$
1	1	1	1
2	1 $\bar{0}$	01	0 $\bar{0}$ 1
3	1 $\bar{1}$	01	0 $\bar{1}$ 1
4	1 $\bar{0}\bar{0}$	001	0 $\bar{0}\bar{0}$ 01
5	1 $\bar{0}\bar{1}$	001	0 $\bar{0}\bar{0}$ 11
6	1 $\bar{1}\bar{0}$	001	0 $\bar{1}\bar{0}$ 01
7	1 $\bar{1}\bar{1}$	001	0 $\bar{1}\bar{0}$ 11

γ の符号語長は

$$L_\gamma(j) = 2\lfloor \log_2 j \rfloor + 1 \quad (5)$$

である¹⁾。ここで、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は切捨てを表している。

Fig.1 に百万までの正整数の符号語長を点描によって示す。密集している場合は線状に見えている。

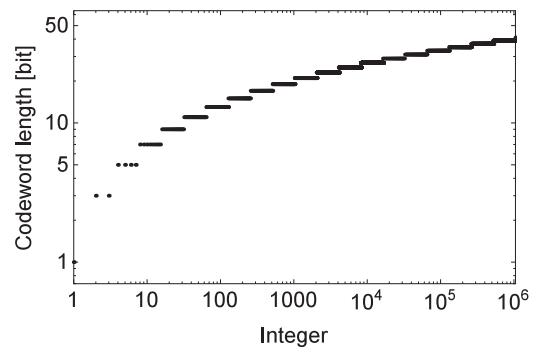


Fig.1 Codeword length of γ

4.2 既存研究

Elias¹⁾ は、 γ の符号語長関数を下回らない、上に凸な関数 $L_\gamma^U(j)$ として

$$L_\gamma^U(j) = 2\log_2 j + 1 \quad (6)$$

を挙げている。Fig.2 に $L_\gamma(j)$ と合わせて図示する。なお、次の δ 以降では、符号語長関数のみのグラフは省略する。

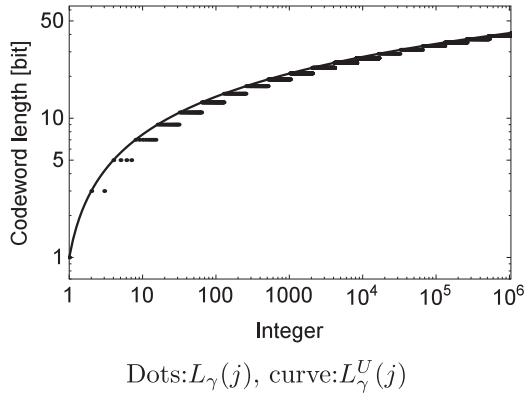


Fig.2 Codeword length and its upper bound of γ

更に、任意の確率分布 P での L_γ^U の期待値 $E_P(L_\gamma^U)$ の上界 $U_\gamma(H(P))$ を、 L_γ^U の凸性を用いて、

$$U_\gamma(H(P)) = 2H(P) + 1 \quad (7)$$

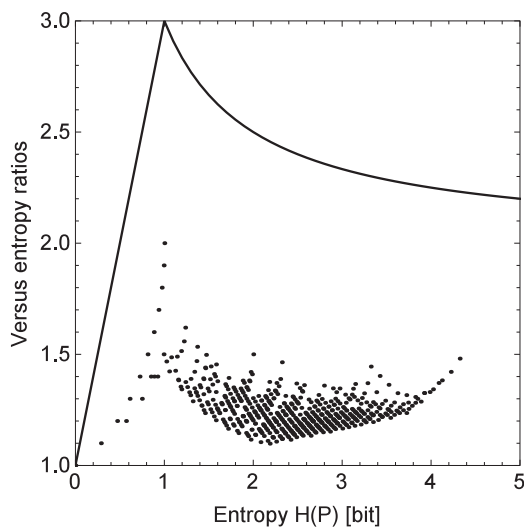
と導出し、これの対エントロピー比 $R_\gamma(H(P))$ を

$$R_\gamma(H(P)) = \frac{U_\gamma(H(P))}{\max\{1, H(P)\}} = \frac{2H(P) + 1}{\max\{1, H(P)\}} \quad (8)$$

と導出している¹⁾。

$R_\gamma(H(P))$ を単独の図で描くことは省くが、Fig.3 と Fig.4 で実線で表したものがこれである。

文献3) では、分解能 20 分の 1 で式(4)を満たす全ての確率分布を生成し、それぞれについて平均符号語長とエントロピーから $\frac{E_P(L_\gamma)}{\max\{1, H(P)\}}$ を求めている。Fig.3 の点描がそれである。



Line: $R_\gamma(H(P))$, small dot: by resolution 1/20

Fig.3 Versus entropy ratios on γ

Elias の解析では $R_\gamma(H(P))$ として 3 があり得るが、文献3) では、エントロピーが小さいところでは 2 辺りまでではないかとの疑問が残っていた。

4.3 更なる解析と結果

文献3) では、エントロピーが大きい場合については明らかにしていない。式(8)より、エントロピーが大きいときに、 $R_\gamma(H(P))$ が 2 に収束することは言える。しかし、3 に近い値をとるかどうかまでは情報を与えないため、エントロピーが大きい場合について数値実験を行った。

本論文での数値実験は、具体的には、符号 (一時的に、一般化して C と表す) について、仮にエントロピーが h である場合に注目したとして、

$$H(P^*) = h \quad (9)$$

かつ

$$\begin{aligned} P^*(1) &\geq P^*(2) = P^*(3) = \dots = P^*(N) \\ &\geq P^*(N+1) = P^*(N+2) = \dots = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

のように 2 から N までが同じ確率であるような P^* を生成し、対エントロピー比 $R_C(h, N)$ を

$$R_C(h, N) = \frac{\sum_{j=1}^N P^*(j) L_C(j)}{\max\{1, h\}} \quad (11)$$

と求めた。

これは、式(4)を満たしながら、できるだけ長い符号語を加味するために式(10)を条件としたものである。現在、解析的に求められないため、 N までで打ち切る形にしている。 N の増加に対し $R_C(h, N)$ は単調増加ではなかったため、 N を 2^{30} 程度以下で幅広く変えて計算した。誤差のより少ない計算と視覚化のために数式処理系 (Mathematica 10) を用いた。

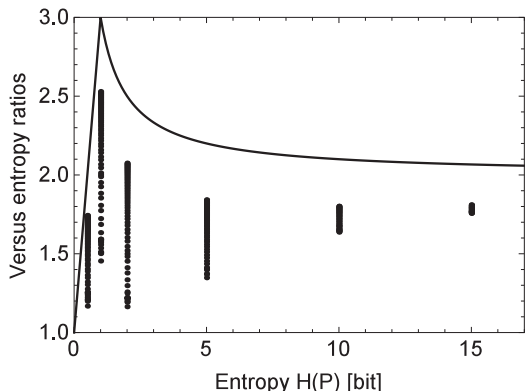
これで得られた値によって、 $\frac{U_\gamma(H(P))}{\max\{1, H(P)\}}$ の実際の上界を推測することとした。

実験結果を Fig.4 に点描で示す。エントロピーが、 $\frac{1}{2}$ 、1、2、5、10、15 の場合について求めている。例えば、 $h = 15$ で他よりプロット数が少なく見えるのは、プロットが密集していることに加え、 $N < 2^{15}$ ではどのような確率分布でもエントロピーが 15 以上にはならないため $1 \leq N < 2^{15}$ に相当するプロットがないためである。

エントロピーが小さいところで、2.5 以上になる場合もあることが分かった。

γ の平均符号語長の対エントロピー比について、数値実験は必ずしも最大値を与えているとは言えないが、Elias の理論式はコンマ数ビット以内で上界を

与えていると言える。



Line: $R_\gamma(H(P))$,
dots: by equal probability for more than 1

Fig.4 Versus entropy ratios on γ

5 δ について

5.1 符号 δ

$\delta(j)^{1)}$ の符号化は、 j の通常の 2 進数表現から MSB を除いたビットの前に、 j の通常の 2 進数表現のビット数を γ で符号化した内容を前置するのが特徴である。 j の桁数情報が約 $2 \log_2 \log_2 j$ ビットの表現で済むため、符号語長の主たる項は $\log_2 j$ になる。

Table 2 に整数 1~7 の符号語例を示す。

Table 2 Codeword examples of δ

Integer j	Usual binary number	Length by γ	Codeword $\delta(j)$
1	1	1	1
2	$\bar{1}0$	001	001 $\bar{0}$
3	$\bar{1}\bar{1}$	001	001 $\bar{1}$
4	$\bar{1}0\bar{0}$	011	011 $\bar{0}\bar{0}$
5	$\bar{1}0\bar{1}$	011	011 $\bar{0}\bar{1}$
6	$\bar{1}\bar{1}\bar{0}$	011	011 $\bar{1}\bar{0}$
7	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	011	011 $\bar{1}\bar{1}$

5.2 既存研究

δ の符号語長は

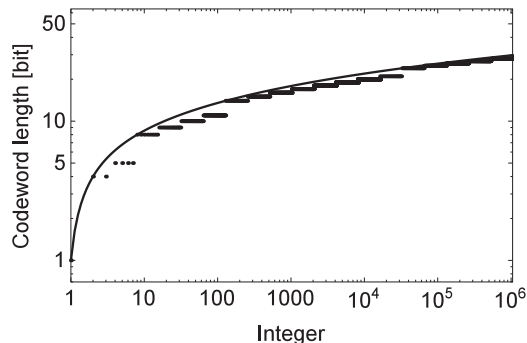
$$L_\delta(j) = \lceil \log_2 j \rceil + 2 \lceil \log_2 \lceil \log_2 j \rceil \rceil + 1 \quad (12)$$

である¹⁾。Fig.5 に、点描で表している。

Elias¹⁾ は、 δ の符号語長関数に接し、これを下回らない、上に凸な関数

$$L_\delta^U(j) = \log_2 j + 2 \log_2 (\log_2 j + 1) + 1 \quad (13)$$

を示している。Fig.5 に、曲線で表している。



Dots: $L_\delta(j)$, curve: $L_\delta^U(j)$

Fig.5 Codeword length and its upper bound of δ

任意の確率分布について $L_\delta^U(j)$ の期待値の上界 $U_\delta = E_P(L_\delta^U)$ を求めると

$$U_\delta(H(P)) = H(P) + 2 \log_2 (H(P) + 1) + 1 \quad (14)$$

である¹⁾。これと $\max\{1, H(P)\}$ との比を取って、

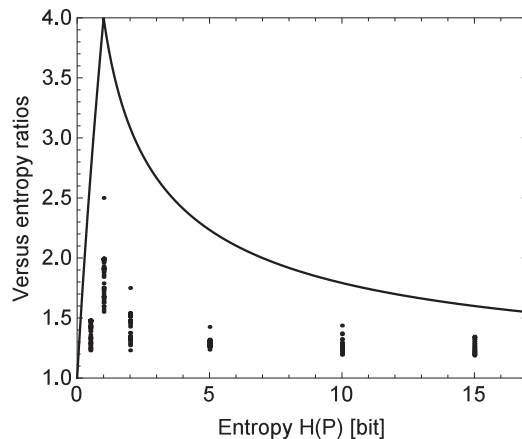
$$\begin{aligned} R_\delta(H(P)) &= \frac{E_P(L_\delta^U)}{\max\{1, H(P)\}} \\ &= \frac{H(P) + 2 \log_2 (H(P) + 1) + 1}{\max\{1, H(P)\}} \end{aligned} \quad (15)$$

が得られている¹⁾。

Fig.6 に実線で示しているのがこれである。最大で 4 になり、エントロピーの増加とともに減少し 1 に収束する。

5.3 更なる解析と結果

γ の場合と同様に数値実験で対エントロピー比のデータを得た。Fig.6 で点描で表している。



Line: $R_\delta(H(P))$,
dots: by equal probability for more than 1

Fig.6 Versus entropy ratios on δ

δ の平均符号語長の対エントロピー比について、大きなエントロピーでは Elias の理論式はさほど大きすぎる値にはなっていないと言える。エントロピーが 1 ビット付近では Elias の理論式より小さい 2.5 が数値実験では得られており、今後の改善の可能性が残る。

6 ω について

6.1 符号 ω

ω の符号化は、通常の 2 進数表現の前側に、桁数から 1 引いた値を再帰的に（但し、2 以上である間だけ）通常の 2 進数表現で繰り返し前置する。復号時に末端が分かるよう最後に 0 を置く。再帰的な構造を持つところが特徴である。後述する符号語長関数にもこのことが現れている。

Table 3 に整数 1~7 の符号語例を示す。

Table 3 Codeword examples of ω

Integer	Usual binary number	Decrement length by Usual binary number	Codeword $\omega(j)$
j	$(j \geq 2)$	number	
1			0
2	$\bar{1}0$		$\bar{1}00$
3	$\bar{1}\bar{1}$		$\bar{1}\bar{1}0$
4	$\bar{1}00$	10	$10\bar{1}000$
5	$\bar{1}0\bar{1}$	10	$10\bar{1}0\bar{1}0$
6	$\bar{1}\bar{1}0$	10	$10\bar{1}\bar{1}00$
7	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	10	$10\bar{1}\bar{1}\bar{1}0$

ω の符号語長 $L_\omega(j)$ は

$$L_\omega(j) = \lfloor \log_2 j \rfloor + \lfloor \log_2 \lfloor \log_2 j \rfloor \rfloor + \dots + w^*(j) \quad (16)$$

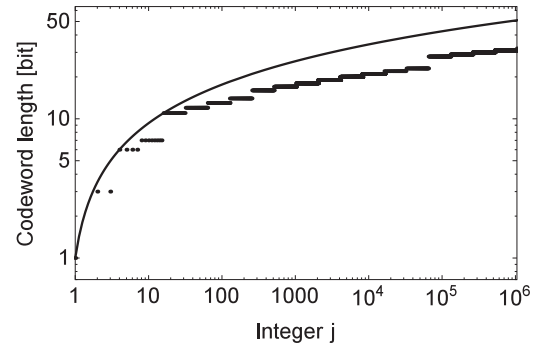
である¹⁾。この式では、0 以上の項だけが足し合わされる。 $w^*(j)$ はその前の 0 以上の項の数である。Fig.7 において点描で表している。

6.2 既存研究

ω の符号語長関数に接し、これを下回らない、上に凸な関数 $L_\omega^U(j)$ として Elias¹⁾ は

$$L_\omega^U(j) = \frac{5}{2} \log_2 j + 1 \quad (17)$$

を挙げている。Fig.7 において曲線で表している。



Dots: $L_\omega(j)$, curve: $L_\omega^U(j)$

Fig.7 Codeword length and its upper bound of ω

任意の確率分布について $L_\omega^U(j)$ の期待値の上界 $U_\omega(H(P))$ を求めると

$$U_\omega(H(P)) = \frac{5}{2}H(P) + 1 \quad (18)$$

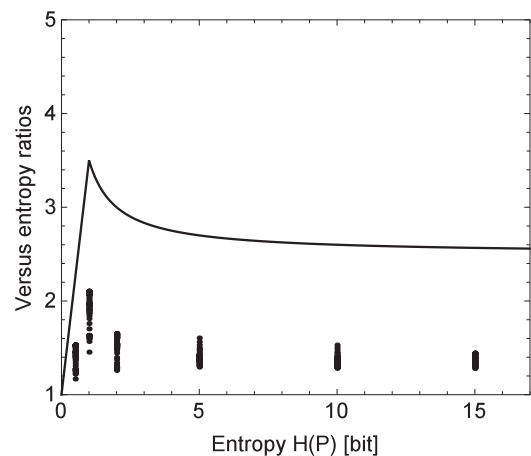
である¹⁾。 $\max\{1, H(P)\}$ との比として、

$$\begin{aligned} R_\omega(H(P)) &= \frac{E_P(L_\omega^U)}{\max\{1, H(P)\}} \\ &= \frac{\frac{5}{2}H(P) + 1}{\max\{1, H(P)\}} \end{aligned} \quad (19)$$

が導かれている。Fig.8 において実線で表している。

6.3 更なる解析と結果

以上の符号と同様に 2 以上で等確率の場合でデータを得た。Fig.8 で点描で表している。



Line: $R_\omega(H(P))$,

dots: by equal probability for more than 1

Fig.8 Versus entropy ratios on ω

エントロピー無限大での収束値は、Elias の導いた式 (19) からは $\frac{5}{2}$ ということになるが、Fig.8 からは式 (19) はかなり大きく見積もっていると考えられる。

次の理由から、エントロピーが無限大での収束値は 1 であると言える。

式 (17) の主たる項は $\lfloor \log_2 j \rfloor$ である。定数オーダーを取り去ると、 $\log_2 j$ であると言える。そのような関数を下回らない凸な関数の主たる項も $\log_2 j$ である。任意の確率分布に対する期待値の上界の主たる項は、文献 1) にならって、 $H(P)$ である。これの $\max\{1, H(P)\}$ に対する比は、エントロピー無限大で 1 である。Elias の導いた式は大いに改善の余地があるといえる。

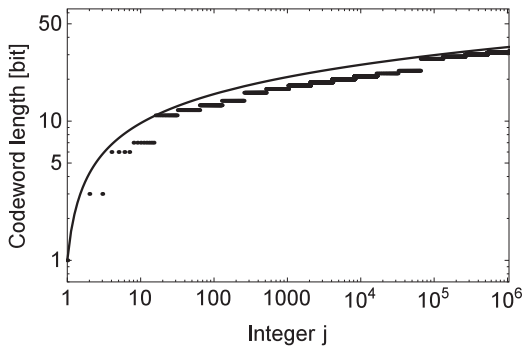
本論文では符号語長の上界の式として次の式を提案する。

$$L'_\omega(j) = \log_2 j + (a + 1) \log_2(\log_2 j + 2) - a \quad (20)$$

ここで、 $a = \frac{7 - \log_2 6}{\log_2 6 - 1} = 2.7855 \dots$ である。

この式は、次のように導いたものである。式 (16) の主たる 2 項がおおよそ $\log_2 j + \log_2 \log_2 j$ の形であることから、 $\log_2 j$ で上界として不足する分を $\log_2 \log_2 j$ の形の項の定数倍で補うこととした。式が単純で、かつ、全ての正整数について上界がよく追従した $\log_2(\log_2 j + 2)$ を用いた。 $j = 1$ での値が正確に $L_\omega(1)$ と同じ 1 になるような係数として、定数項で引く値 a に 1 加えた値を用いた。以上を満たす最小の a は $a = \frac{7 - \log_2 6}{\log_2 6 - 1}$ であった。

Fig.9 において曲線で表している。Fig.7 の Elias の関数よりは上界としての追従がよい。



Dots: $L_\omega(j)$, curve: $L'_\omega(j)$

Fig.9 Codeword length and its upper bound of ω

これを用い、文献 1) になら、任意の確率分布について $L'_\omega(j)$ の期待値の上界 $U_\omega(H(P))$ を求めると

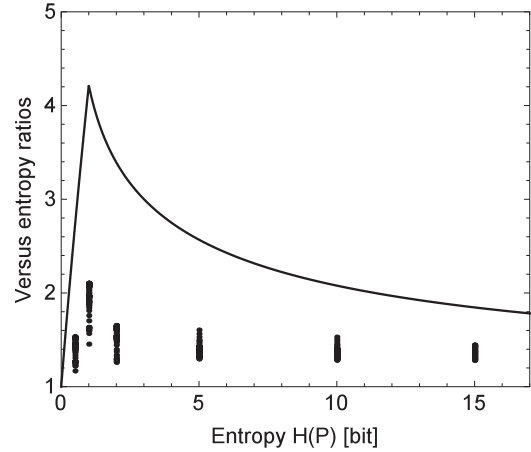
$$U'_\omega(H(P)) = H(P) + (a + 1) \log_2(H(P) + 2) - a \quad (21)$$

である。 $\max\{1, H(P)\}$ との比として、

$$R'_\omega(H(P)) = \frac{E_P(L'_\omega)}{\max\{1, H(P)\}}$$

$$= \frac{H(P) + (a + 1) \log_2(H(P) + 2) - a}{\max\{1, H(P)\}} \quad (22)$$

が導かれる。Fig.10 において実線で表している。



Line: $R_\omega(H(P))$,

dots: by equal probability for more than 1

Fig.10 Versus entropy ratios on ω

まとめると、 ω について符号語長の上界の式を改善した。平均符号語長の対エントロピー比は、 $H(P) = 1$ 付近では課題が残るものの、エントロピーの増加に伴って 1 に収束する関数である。

7 ρ_k について

7.1 符号 ρ_k

$\rho_k(j)$ の符号化は、 j の通常の 2 進数表現のビット数を k で割り切り上げた値を m とおき、 j の km ビットでの表現 (Table 4 では $k = 2$ の場合について上線) と、 m の単進符号 (0 で終わる) のビットを、 k 対 1 で交互に詰め合わせる。 γ に類似しているが、 k ビットずつ扱うところが特徴である。

本論文では $k = 2, 3, 4$ の場合を扱う。 $k = 1$ の場合は、1 ビット長くなる以外では γ と同じ符号語長の特徴のため扱わないことにする。

Table 4 に整数 1~7 の ρ_k の符号語例を示す。Table 4 で、2 列目は ρ_2 の符号語に含まれている $2m$ ビットでの j の表現、3 列目は m の単進符号での内容である。

符号語長 $L_{\rho_k}(j)$ は

$$L_{\rho_k}(j) = (k + 1) \left(\left\lfloor \frac{\log_2 n}{k} \right\rfloor + 1 \right) \quad (23)$$

である¹⁾。 $L_{\rho_2}(j)$ を Fig.11 に点描で表している。

Table 4 Codeword examples of ρ_k

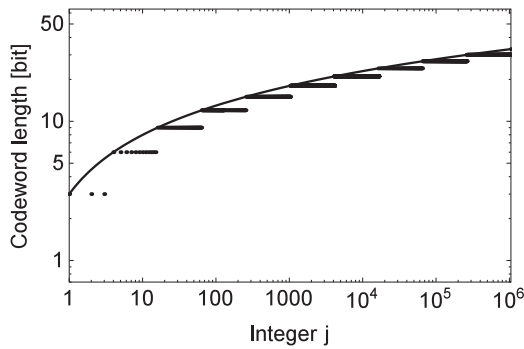
Integer j	Even bit binary number	Length by unary code	Codeword		
			$\rho_2(j)$	$\rho_3(j)$	$\rho_4(j)$
1	$\bar{0}\bar{1}$	0	$\bar{0}\bar{1}0$	0010	00010
2	$\bar{1}\bar{0}$	0	$\bar{1}\bar{0}0$	0100	00100
3	$\bar{1}\bar{1}$	0	$\bar{1}\bar{1}0$	0110	00110
4	$\bar{0}\bar{1}\bar{0}\bar{0}$	10	$\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{0}\bar{0}0$	1000	01000
5	$\bar{0}\bar{1}\bar{0}\bar{1}$	10	$\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{0}\bar{1}0$	1010	01010
6	$\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{0}$	10	$\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{0}0$	1100	01100
7	$\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	10	$\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{0}$	1110	01110

7.2 既存研究

ρ_k の符号語長関数に接し、これを下回らない、上に凸な関数 $L_{\rho_k}^U(j)$ は

$$L_{\rho_k}^U(j) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \log_2 j + k + 1 \quad (24)$$

である¹⁾。 $L_{\rho_2}^U(j)$ を Fig.11 に曲線で表している。



Dots: $L_{\rho_2}(j)$, curve: $L_{\rho_2}^U(j)$

Fig.11 Codeword length and its upper bound of ρ_2

任意の確率分布について $L_{\rho_k}^U(j)$ の期待値の上界 $U_{\rho_k}(H(P))$ を求めると

$$U_{\rho_k}(H(P)) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) H(P) + k + 1 \quad (25)$$

である¹⁾。 $\max\{1, H(P)\}$ との比は、

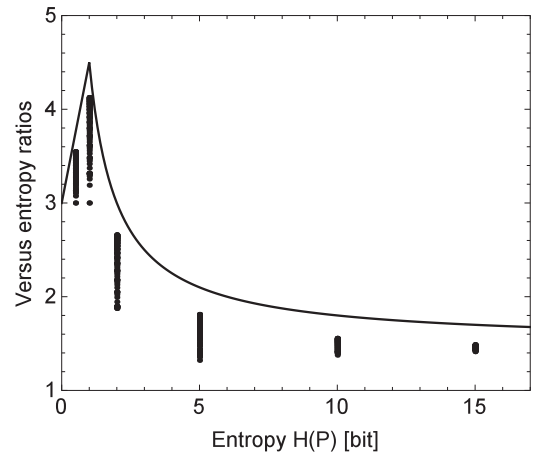
$$\begin{aligned} R_{\rho_k}(H(P)) &= \frac{E_P(L_{\rho_k}^U)}{\max\{1, H(P)\}} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)H(P) + k + 1}{\max\{1, H(P)\}} \end{aligned} \quad (26)$$

である¹⁾。 Fig.12 において実線で表している。 Fig.12 の (a)~(c) は、それぞれ k が 2、3、4 の場合である。

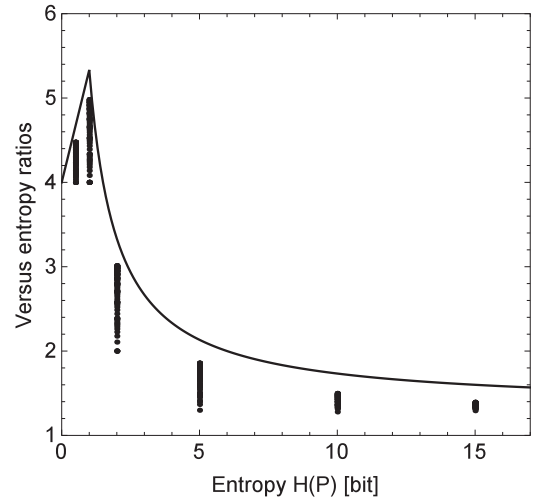
7.3 更なる解析と結果

k が 2、3、4 の場合の数値実験の結果を Fig.12 に点描で表している。 ρ_k の平均符号語長の対エントロ

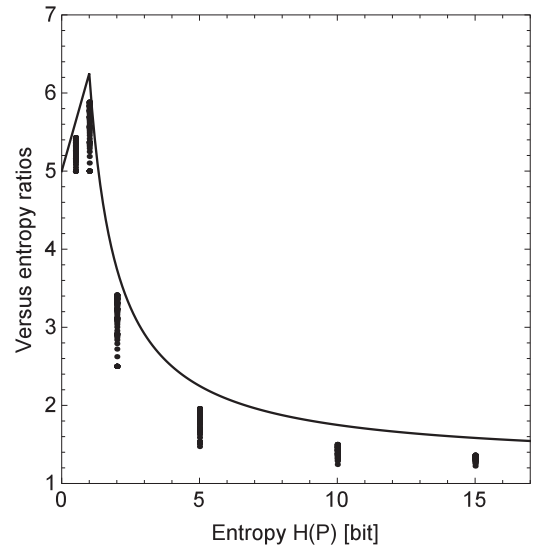
ピー比について、Elias の理論式は良い上界を与えていると言える。



(a) on code ρ_2



(b) on code ρ_3



(c) on code ρ_4

Line: $R_{\rho_k}(H(P))$,

dots: by equal probability for more than 1

Fig.12 Versus entropy ratios on ρ_k

8 まとめ

正整数符号 γ , δ , ω , ρ_k について、平均符号語長の対エントロピー比の数値実験を行い Elias が与えた上界の理論式と比較した。

(1) ρ_k について Elias の式がよい上界を与えていることを示した。 γ についての Elias の上界の式は、もし大きかったとしてもコンマ数ビット以内である。

(2) ω についての Elias の式は、エントロピーが大きい場合の収束値が実際と異なることを示した。更に、この点を改善した上界の式を与えた。小さいエントロピーでの値を抑えることは課題である。

(3) δ についての Elias の式は、本論文の数値実験の範囲では、実際よりやや大きい値を与えると推測される。一層の検証と改善は課題である。

文献

- 1) P.Elias, "Universal codeword sets and representations of the integers," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-21, no.2, pp.194-203, March 1975.
- 2) Yokoo,H. and Takahashi,M., "Data compression by Context Sorting," IEICE Transactions on Fundamentals(電子情報通信学会英論文誌 (AE)), vol.E79-A, no.5, pp.681-686, May 1996.
- 3) 中村博文, "正整数符号を用いた平均符号語長の対エントロピー比の上界について," 情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.827-832, Dec. 2009.
- 4) V.I.Levenshtein, "On the redundancy and delay of decodable coding of natural numbers," Systems Theory Research, vol.20, pp.149-155, 1968.