(オンライン)ISSN 2432-1036
(冊子版)ISSN 0286-116X

都 城 工 業 高 等 専 門 学 校

研　究　報　告

第 58 号

令和 6 (2024)年 1 月

目　　次

研究論文編

****

研　究　論　文　編

正整数符号化におけるAhlswede-Han-Kobayashiの符号語長関数の正規化定数の算出

中村　博文[1]

Calculation of Normalization Constants of Ahlswede-Han-Kobayashi's Codeword Length Functions for Positive Integer Coding

NAKAMURA Hirofumi[1]

（令和6年1月9日受理）

あらまし　本論文では符号語には立ち入らず符号語長のみを扱う。正整数の2進符号化についてP. Eliasによって正整数nの符号語長が$a\log_2 n+\mathcal{O}(1)$や$\log_2 n+b\log_2 n+\mathcal{O}(1)$に分類されていた。ここで、$a$や$b$は1を超える実定数、$\mathcal{O}(\cdot)$はランダウの漸近記法である。S.K. Leung-Yan-CheongとT. Coverによってより小さいオーダの関数$\log_2^* n$についてクラフト和を1にする正規化定数すなわち$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(\log_2^* n+C_0)}=1$となる実定数$C_0$が存在することが示され、J. Rissanenによって$C_0=1.5185\cdots$であることが示された。ここで、$\log_2^* n=\log_2 n+\log_2\log_2 n+\log_2\log_2\log_2 n+\cdots$は対数スター関数と呼ばれ、項は0以上である間足し合わされる。その項の数を$w_2^*(n)$と表す。更に、Ahlswede-Han-Kobayashi（R. AhlswedeとT.S. Han、K. Kobayashi）によって、正整数の$r(\geq 2)$進符号化について、オーダが対数スター関数より小さい修正対数スター関数と呼ばれる$\log_r^*(x)-\alpha w_r^*(x)+\beta\log_r w_r^*(x)$の形式の式をひとつ以上用いて、オーダがわずかずつでも段々と小さくなる一連の符号語長関数が示されている。しかし、その正規化定数は一部が算出されたのみである。本論文ではその関数について、関数のパラメータのいくつかの値と極限において、クラフト和を1にする正規化定数の具体的な計算方法を示し値を算出する。2進符号化のみで見られる正規化定数の傾向があり、その要因も明らかにする。

キーワード　［正整数符号化, 符号語長関数, 修正対数スター関数, ユニバーサル符号化］

1　まえがき

本論文では符号語には立ち入らず符号語長のみを扱う。関連する既存研究を詳しくは2で述べる。

上限を限定しない正整数の$r(\geq 2)$進符号化についてAhlswede-Han-Kobayashi[1)]によって一連の符号語長関数が示されている。関数は、クラフト和が有限である実数の関数として、正整数nに依存する項が示されている。オーダはそれまでの符号語長関数より小さいが、クラフト和を1にする実数値の正規化定数（以下、簡単に正規化定数）の具体的な値はほとんど知られていない。本論文では、符号語長関数のパラメータのいくつかの値について、正規化定数の具体的な計算方法を示し値を算出する。また、パラメータが極限値に収束する場合についても解析する。2進符号化では3進以上の符号化にない傾向が見られるが、その理由も明らかにする。

文献1)での符号語長関数は、更に組み合わせられることから、3で組み合わせに言及してから4以降で議論を進める。

1 都城工業高等専門学校一般科目　General Education Division, National Institute of Technology(KOSEN), Miyakonojo College

2　既存研究

関数 $\log_r$ の $i(\geq 1)$ 回の合成関数を $\log_r^i$ と表す。r は 2 以上の整数である。

まず、正整数の 2 進符号化について正整数 n の符号語長が $a\log_2 n + \mathcal{O}(1)$ や $\log_2 n + b\log_2 n + \mathcal{O}(1)$ に分類された [2]。ここで、a や b は 1 を超える実定数、$\mathcal{O}(\cdot)$ はランダウの漸近記法である。

よりオーダの小さい対数スター関数と呼ばれる関数が

$$\log_r^*(x) = \log_r x + \log_r^2 x + \log_r^3 x + \cdots \tag{1}$$

と定義される。加えるのは 0 以上の項のみである。その項の数を $w_r^*(x)$ と表す。例えば、$\log_2^*(65536) = \log_2 2^{16} + \log_2 16 + \log_2 4 + \log_2 2 + \log_2 1 = 23$ であり、$w_2^*(65536) = 5$ である。

正整数の 2 進符号化に関して関数 $\log_2^* n$ についてクラフト和を 1 にする正規化定数すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(\log_2^* n + C_0)} = 1 \tag{2}$$

となる実定数 C_0 が存在し [3]、その値は $C_0 = 1.5185\cdots$ であること [4] が示された。

修正対数スター関数と呼ばれる関数が

$$\log_{r,\alpha,\beta}^*(x) \ = \ \log_r^*(x) - \alpha w_r^*(x) + \beta \log_r w_r^*(x)$$

と定義されている [1]。$\alpha_r^* = \log_r \log_r e$,

$$\begin{aligned}\log_{r,\alpha}^*(x) &= \log_{r,\alpha,0}^*(x) \\ &= \log_r^*(x) - \alpha w_r^*(x)\end{aligned} \tag{3}$$

とおく。この関数のクラフト和が、$\alpha \geq \alpha_r^*$ なら

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-\log_{r,\alpha}^*(n)} = \infty$$

と発散するが、$\alpha < \alpha_2^*$ なら

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-\log_{r,\alpha}^*(n)} < \infty \tag{4}$$

と有限であることが示されている [5]。

更にオーダの小さい関数として、

$$\begin{aligned}&\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^*(x) \\ &= \ \log_r^*(x) - \alpha_r^* w_r^*(x) + \beta \log_r w_r^*(x)\end{aligned} \tag{5}$$

が挙げられている [1]。この関数のクラフト和は、$\beta \leq 1$ なら発散し、$\beta > 1$ なら有限である [1]。

この関数の正規化定数を $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^*$ と表す [†1] と、

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-\left(\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^*(n) + d_{r,\alpha_r^*,\beta}^*\right)} = 1 \tag{6}$$

である。クラフト和が 1 になる実数の符号語長関数は

$$\begin{aligned}&\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^*(x) + d_{r,\alpha_r^*,\beta}^* \\ &= \ \log_r^*(x) - \alpha_r^* w_r^*(x) + \beta \log_r w_r^*(x) + d_{r,\alpha_r^*,\beta}^*\end{aligned} \tag{7}$$

である。整数符号語長での具体的な符号語割り当てについては、シャノン符号化を用いれば正整数 n を

$$c_{r,\alpha_r^*,\beta}^*(n) = \left\lceil \log_{r,\alpha_r^*,\beta}^*(n) + d_{r,\alpha_r^*,\beta}^* \right\rceil \tag{8}$$

の長さで符号化できる [1]。ここで、$\lceil\cdot\rceil$ は天井関数を表す。

以下ではその都度言及はしないが、クラフト和が有限の実数関数は正規化定数を足すことでクラフト和を 1 にできる。また、クラフト和が 1 以下の実数関数は、このようにシャノン符号化によってたかだか 1 未満の増加で整数符号語長での符号化を考えることができる。

更に、以下のように n に依存した項を加え、式 (7) において $\beta = 1$ であるような、より小さいオーダでの符号化が可能であることも示されている [1]。

関数 w_r^* の $i(\geq 0)$ 回の合成関数 $w_r^{(i)*}$ を用いて、

$$\begin{aligned}&\log_{r,\alpha}^{(m)*}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \log_{r,\alpha_r^*}^*(w_r^{(k)*}(x)) + \log_{r,\alpha}^*(w_r^{(m-1)*}(x))\end{aligned} \tag{9}$$

とおく [1]。$\sum$ で足している $m-1$ 個の項を含めた、合計 m 個の項には、n に $w_r^*(\cdot)$ を再帰的に適用した値が充てられている。なお、この式で最後に足される修正対数スター関数のパラメータは、α_r^* ではなく α である。

$\log_{r,\alpha}^{(m)*}$ は、$\alpha \geq \alpha_r^*$ では発散し、$\alpha < \alpha_r^*$ では有限である [1]。また、$\alpha_1 < \alpha_r^*,\ \alpha_2 < \alpha_r^*$ のとき、正整数 m について

$$\log_{r,\alpha_1}^{(m)*}(x) - \log_{r,\alpha_2}^{(m+1)*}(x) \to \infty \ (x \to \infty) \tag{10}$$

であり、m が 1 つ違うとオーダは本質的に異なる [1]。

r の x 乗を $\exp_r(x)$ と表す。$\exp_r$ の $i(\geq 0)$ 回の合成関数を $\exp_r^i$ と表す。例えば、$\exp_r^3(x) = r^{r^{r^x}}$ である。

$a^* = r^{-\alpha_r^*}$ とおくと、$-\alpha_r^* = \log_r a^*$ であり、

$$\begin{aligned}&\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^*(x) \\ &= \ \log_r^1 x + \log_r^2 x + \cdots + \log_r^{w_r^*(x)} x \\ &\quad + (\log_r a^*) w_r^*(x) + \beta \log_r w_r^*(x)\end{aligned}$$

†1 文献 1) では $d_{r,\beta}^*$ と表されている。本論文では関数との対応が分かりやすいよう、添字は関数に合わせる。他の正規化定数や関連記号も同様にする。

である。任意の正整数 m について、$\exp_r^m(0) \le x < \exp_r^{m+1}(0)$ の範囲では、$w_r^*(x) = m$ であり、

$$
\begin{aligned}
&\int r^{-\log^*_{r,\alpha^*_r,\beta}(x)}dx \\
&= \int \frac{dx}{x \cdot \log_r^1 x \cdot \log_r^2 x \cdot \cdots \cdot \log_r^{w_r^*(x)-1} x \cdot (\alpha^*)^{w_r^*(x)} \cdot (w_r^*(x))^\beta} \\
&= \frac{1}{m^\beta} \cdot \frac{1}{(\alpha^*)^m} \int \frac{dx}{x \cdot \log_r^1 x \cdot \log_r^2 x \cdot \cdots \cdot \log_r^{m-1} x} \\
&= \frac{1}{m^\beta} \cdot \frac{(\log_e r)^m}{(\alpha^*)^m} \log_r^m x \qquad (11) \\
&= \frac{1}{m^\beta} \log_r^m x \qquad (12)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これを用いて、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\exp_r^m(0)}^{\exp_r^{m+1}(0)} r^{-\log^*_{r,\alpha^*_r,\beta}(x)}dx \\
&= \frac{1}{m^\beta}\left[\log_r^m x\right]_{\exp_r^m(0)}^{\exp_r^{m+1}(0)} \\
&= \frac{1}{m^\beta} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

である。これを $S_{m,\alpha^*_r,\beta}$ と表す†2。

正規化定数の値について、関数 $\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ の $r = 2$、$\alpha = 0$ の場合の値 4)（式 (2) の C_0 の値）、関数 $\log^*_{r,\alpha^*_r,\beta}$ の $r = 2$、$\beta = 2$ の場合の $d^*_{r,\alpha^*_r,\beta}$ 6) は求められているが、パラメータの他の値についてはこれまで知られていない。

3 既存研究の組み合わせによる符号語長関数

3.1 符号語長関数と正規化定数

$\log^*_{r,\alpha^*_r,\beta}$ について正規化定数を考えたのと同様に、$\log^*_{r,\alpha}$ や $\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ についても正規化定数を考えることができる。それらを仮に $d^*_{r,\alpha}$ 及び $d^{(m)*}_{r,\alpha}$ と表すことにする。値は 5 で算出する。$d^*_{r,\alpha} = d^{(1)*}_{r,\alpha}$ である。

また、$\log^*_{r,\alpha}(x)$ $(=\log^*_r(x) - \alpha w^*_r(x))$と $\log^*_{r,\alpha^*_r,\beta}(x)$ ($=\log^*_r(x) - \alpha^*_r w^*_r(x) + \beta \log w^*_r(x)$) との差異は、$\alpha$ が α^*_r になり、$\beta \log w^*_r(x)$ が加わったことである。これと同様のことを $\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ に対して行った関数を考えることができる。これを仮に $\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ と表すと、

$$
\begin{aligned}
&\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m-2} \log^*_{r,\alpha^*_r}(w_r^{(k)*}(x)) + \log^*_{r,\alpha^*_r,\beta}(w_r^{(m-1)*}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \log^*_{r,\alpha^*_r}(w_r^{(k)*}(x)) + \beta \log(w_r^{(m)*}(x)) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

である。この関数のクラフト和が、$\beta \le 1$ なら発散し、$\beta > 1$ なら有限であることは、付録 1 に述べる。

$\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ について式 (10) で挙げたのと同様に、$\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ も m が 1 つ違うとオーダは本質的に異なる。つまり $\beta_1 > 1,\ \beta_2 > 1$ と正整数 m について

$$
\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta_1}(x) - \log^{(m+1)*}_{r,\alpha^*_r,\beta_2}(x) \to \infty\ (x \to \infty) \qquad (15)
$$

が成り立つ。これは、$\log^{(m+1)*}_{r,\alpha^*_r,\beta_2}(x)$ を展開したときに、$\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta_1}(x)$ の β_1 と同じ位置の値が 1 であることからいえる。

同様にして $\alpha_1 < \alpha^*_r,\ \beta_1 > 1,\ \alpha_2 < \alpha^*_r$ と正整数 m について

$$
\log^{(m)*}_{r,\alpha_1}(x) - \log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta_1}(x) \to \infty\ (x \to \infty), \qquad (16)
$$

$$
\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta_1}(x) - \log^{(m+1)*}_{r,\alpha_2}(x) \to \infty\ (x \to \infty) \qquad (17)
$$

が成り立ち、$\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ と $\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ のオーダの小ささは m の増加に伴い交互に追い越し合う関係にある。

$\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ の正規化定数を仮に $d^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ と表す。値は 5 で算出する。$d^*_{r,\alpha^*_r,\beta} = d^{(1)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ である。

4 定数 $d^{(m)*}_{r,\alpha}$ と $d^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ の算出の準備

4.1 $d^{(m)*}_{r,\alpha}$ と $d^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ の算出の一般化

$\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ と $\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ について、$\log^*_{r,\alpha^*_r}$ の出現数を簡単に m' と表し、それ以外の項を $h_r(\cdot)$ と表すことにする。m' は m に依存している。$\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ については $m' = m-1,\ h_r(j) = \log^*_r j - \alpha w^*_r(j)$, $\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ については $m' = m,\ h_r(j) = \beta \log_r j$ である。これらを用いて、2 つの符号語長関数をまとめて

$$
\begin{aligned}
&f_{r,m,h_r}(n) \\
&= \sum_{k=0}^{m'-1} \log^*_{r,\alpha^*_r}(w_r^{(k)*}(n)) + h_r(w_r^{(m')*}(n)) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

と一般化できる。

いくつかの n について、$\log^{(m)*}_{r,\alpha}$ と $\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ において $\log^*_{r,\alpha^*_r}$ や $h_r(\cdot)$ に渡される値を例示する。表 1 は、$r = 2,\ m' = 4$ の例である。表 2 は、$r = 3,\ m' = 4$ の例である。表において、「″」と記した欄は上側の欄と同じ内容であることを表す。

表 1 の内容を用いて、例えば、

$$
\begin{aligned}
&\log^{(5)*}_{2,\alpha}\left(\exp_2^{\exp_2^{16}(0)}(0)\right) \\
&= \left(\log^*_2(\exp_2^{\exp_2^{16}(0)}(0)) - \alpha^*_2 \exp_2^{16}(0)\right) \\
&\quad + \left(\log^*_2(\exp_2^{16}(0)) - \alpha^*_2 \times\ 16\right) \\
&\quad + \left(\log^*_2 16 - \alpha^*_2 \times\ 4\right) \\
&\quad + \left(\log^*_2 4 - \alpha^*_2 \times\ 3\right) \\
&\quad + \left(\log^*_2 3 - \alpha \times\ 2\right)
\end{aligned}
$$

であることが確認できる。なお、ここで、式の展開は対数スター関数までとした。

†2 文献 1) では $S_{m,\beta}$ と表記されている。文献 1) では積分範囲の端の包含が異なるが、定積分の値は相等しい。

表 1 修正対数スター関数への引数の値 ($r=2, m'=4$)

at $k=0$, $n=n_0=w_2^{(0)*}(n)$	at $k=1$, $n_1=w_2^{(1)*}(n)$	at $k=2$, $n_2=w_2^{(2)*}(n)$	at $k=3$, $n_3=w_2^{(3)*}(n)$	to $h_2(\cdot)$, $n_{m'}=w_2^{(4)*}(n)$
$1=\exp_r^1(0)$	$1=\exp_r^1(0)$	$1=\exp_r^1(0)$	$1=\exp_r^1(0)$	$1=\exp_r^1(0)$
$2=\exp_r^2(0)$	$2=\exp_r^2(0)$	$2=\exp_r^2(0)$	$2=\exp_r^2(0)$	$2=\exp_r^2(0)$
3	〃	〃	〃	〃
$4=\exp_r^3(0)$	3	〃	〃	〃
5	〃	〃	〃	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	〃	〃	〃	〃
$16=\exp_r^4(0)$	$4=\exp_r^3(0)$	3	〃	〃
$2^{16}=\exp_r^5(0)$	5	〃	〃	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\exp_r^{15}(0)$	15	〃	〃	〃
$\exp_r^{16}(0)$	$16=\exp_r^4(0)$	$4=\exp_r^3(0)$	3	〃
$\exp_r^{2^{16}}(0)$	$2^{16}=\exp_r^5(0)$	5	〃	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\exp_r^{\exp_r^{15}(0)}(0)$	$\exp_r^{15}(0)$	15	〃	〃
$\exp_r^{\exp_r^{16}(0)}(0)$	$\exp_r^{16}(0)$	$16=\exp_r^4(0)$	$4=\exp_r^3(0)$	3

表 2 修正対数スター関数への引数の値 ($r=3, m'=4$)

at $k=0$, $n=n_0=w_3^{(0)*}(n)$	at $k=1$, $n_1=w_3^{(1)*}(n)$	at $k=2$, $n_2=w_3^{(2)*}(n)$	at $k=3$, $n_3=w_3^{(3)*}(n)$	to $h_3(\cdot)$, $n_{m'}=w_3^{(4)*}(n)$
$1=\exp_3^1(0)$	$1=\exp_3^1(0)$	$1=\exp_3^1(0)$	$1=\exp_3^1(0)$	$1=\exp_3^1(0)$
2	〃	〃	〃	〃
$3=\exp_3^2(0)$	2	〃	〃	〃
4	〃	〃	〃	〃
5	〃	〃	〃	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
26	〃	〃	〃	〃
$27=\exp_3^3(0)$	$3=\exp_3^2(0)$	2	〃	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3^{27}=\exp_3^4(0)$	4	〃	〃	〃
$\exp_3^5(0)$	5	〃	〃	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\exp_3^{27}(0)-1$	26	〃	〃	〃
$\exp_3^{27}(0)$	$27=\exp_3^3(0)$	$3=\exp_3^2(0)$	2	〃
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\exp_3^{\exp_3^{27}(0)}(0)$	$\exp_3^{27}(0)$	$27=\exp_3^3(0)$	$3=\exp_3^2(0)$	2

式(18)で再帰的に求めている w_r^* の値について、表1、表2をもとに、次のことがいえる。

すべての r（≥ 2）で、$w_r^*(1)=1$ なので、一度1になるとその後は再帰的に w_r^* を何度適用しても1になる。$r=2$ では、$w_r^*(2)=2$ なので、$n\geq 2$ なら再帰的に w_r^* を何度適用しても1にはならない。$r\geq 3$ では、再帰的に何度でも w_r^* を適用するなら、いつかは値が1になる。

式(18)のクラフト和を

$$p \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} r^{-f_{r,m,h_r}(n)} \tag{19}$$

とおく。

$m'=m-1,\ h_r(j)=\log_r^* j-\alpha w_r^*(j)$ として

$$d_{r,\alpha}^{(m)*} \;=\; \log_r p$$

であり、$m'=m,\ h_r(j)=\beta\log_r j$ として

$$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*} \;=\; \log_r p$$

である。

式(19)について、$\sum$ を展開して逆順に並べ、べき乗の指数部での和をべき乗の積に書き直して、

$$\begin{aligned} p \;=\; & \sum_{n=1}^{\infty} r^{-h_r(w_r^{(m')*}(n))} \\ & \times r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(w_r^{(m'-1)*}(n))} \\ & \times r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(w_r^{(m'-2)*}(n))} \\ & \vdots \\ & \times r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(w_r^{(0)*}(n))} \end{aligned}$$

が得られる。

表1や表2は、n をもとに次々と w_r^* を適用した値を左側から右側に見ていけるが、一方で、右側の値で一つ左側の値の範囲が読み取れるという具合に、右側から左側に見ていくこともできる。この対応関係を利用して、次のように書き換えができる。なお、h_r の引数を簡単に i と表しているが、$n_{m'}$ に当たる値である。

$$\begin{aligned} p \;=\; & \sum_{i=1}^{\infty} r^{-h_r(i)} \\ & \times \sum_{n_{m'-1}=\exp_r^i(0)}^{\exp_r^{i+1}(0)-1} r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(n_{m'-1})} \\ & \times \sum_{n_{m'-2}=\exp_r^{n_{m'-1}}(0)}^{\exp_r^{n_{m'-1}+1}(0)-1} r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(n_{m'-2})} \\ & \vdots \\ & \times \sum_{n_0=\exp_r^{n_1}(0)}^{\exp_r^{n_1+1}(0)} r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(n_0)} \end{aligned} \tag{20}$$

4.2 部分和について

$\log_{r,\alpha}^*$ に関する部分和について、

$$I_{m,\alpha} \;=\; \sum_{\exp_r^m(0)}^{\exp_r^{m+1}(0)} r^{-\log_{r,\alpha}^*(x)} \tag{21}$$

とおく†3。

関数 $\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^*$ に対する $S_{m,\alpha_r^*,\beta}$ と同様に、$\log_{r,\alpha}^*$ に対しても定積分を考えることができる。それを本論文では $S_{m,\alpha}$ と表すことにする。α を、本論文では α_r^* と対比して、

$$\alpha=\alpha_r^* u \tag{22}$$

と捉えておく。u（$=\frac{\alpha}{\alpha_r^*}$）は α に依存している。

$S_{m,\alpha_r^*,\beta}$ を求める際に $r^{-\alpha_r^*}$ を a^* としたが、この代わりに $r^{-\alpha_r^* u}$ を用いるなら、$r^{-\alpha_r^* u}=(a^*)^u=a^*(a^*)^{u-1}$ であり、$\beta=0$ にして式(11)を用いて、

$$\begin{aligned} \int r^{-\log_{r,\alpha}^*(x)}dx \;&=\; \frac{(\log_e r)^m}{(a^*(a^*)^{u-1})^m}\log_r^m x \\ &=\; \frac{1}{(a^*)^{(u-1)m}}\log_r^m x \\ &=\; (\log_r e)^{(u-1)m}\log_r^m x \end{aligned}$$

であり、よって、次式が得られる。

$$\begin{aligned} S_{m,\alpha} \;&=\; \int_{\exp_r^m(0)}^{\exp_r^{m+1}(0)} r^{-\log_{r,\alpha}^*(x)}dx \\ &=\; (\log_r e)^{(u-1)m}\left[\log_r^m x\right]_{\exp_r^m(0)}^{\exp_r^{m+1}(0)} \\ &=\; (\log_r e)^{(u-1)m} \end{aligned} \tag{23}$$

式(21)のとおり総和で表される $I_{m,\alpha}$ は、式(23)で積分で表される $S_{m,\alpha}$ を、数値解析でいう矩形法で求めた値に相当する。$S_{m,\alpha}$ の積分範囲で $r^{-\log_{r,\alpha}^*(x)}$ が非増加関数であることから、$S_{m,\alpha}$ は $I_{m,\alpha}$ の下界であるといえる。関数 $r^{-\log_{r,\alpha}^*(x)}$ の位置を x 方向に1平行移動して積分した値は、式(21)の $\sum$ の加算内容で最初の内容だけを除いた総和の上界になる。よって、

$$\begin{aligned} & S_{m,\alpha_r^* u} \\ <\; & I_{m,\alpha_r^* u} \\ <\; & S_{m,\alpha_r^* u}+r^{-\log_{r,\alpha_r^* u}^*(\exp_r^m(0))} \end{aligned}$$

†3 文献1)において和や部分和に I で始まる記号が用いられている。本論文はそれにならった。

が成り立ち、

$$\begin{aligned} & (\log_r e)^{(u-1)m} \\ < \ & I_{m,\alpha_r^* u} \\ < \ & (\log_r e)^{(u-1)m} + r^{-\log^*_{r,\alpha_r^* u}(\exp_r^m(0))} \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。これは、$u=1$、すなわち $\alpha=\alpha_r^*$、でも成立する。そのときは、$(\log_r e)^{(u-1)m}=1$ である。$r^{-\log^*_{r,\alpha_r^* u}(\exp_r^m(0))}$ は m の増加とともに急速に 0 に近づく。

5　定数 $d_{r,\alpha}^{(m)*}$ と $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ の算出

5.1　$r=2$ の場合

5.1.1　$d_{r,\alpha}^{(m)*}|_{r=2}$ の値

ここまでの式と数式処理系（Wolfram Mathematica）を用いて算出した $d_{r,\alpha}^{(m)*}\big|_{r=2}$ の例を表 3 に示す。

表の中の数値は、上界と下界を別個に求めて、一致した桁について小数点以下 2 桁未満を切り捨てした値である。他の表の数値も同様である。

式 (20) の下界の値を求めるときは、有効桁の確保に支障がない限り、式 (20) の後ろ側からできるだけ多くの $\sum$ の値を 1（式 (24) の下界）で繰り返し置き換えるものとして計算回数を減らした。

式 (20) の上界の値を求めるときも同様に、式 (24) で得られる上界で $\sum$ の値を繰り返し置き換えるものとして計算回数を減らした。更に、j の増加で急速に式 (24) の上界が 1 に収束することも利用した。

表の括弧中のデータについては５.１.３で述べる。

$r=2$ では、m の増加に伴って $d_{r,\alpha}^{(m)*}$ が増えている。$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ についても同様の傾向があることから、これらのことについては５.１.３でまとめて解析する。

5.1.2　$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}|_{r=2}$ の値

$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}\big|_{r=2}$ の算出例を表 4 に示す。括弧中のデータは次節で説明する。

$\beta\log_r j$ が符号語長関数であるときの正規化定数は $\log_2\zeta(\beta)$ である [1]。ここで、ζ はリーマンのゼータ関数を表している。$m=0$ では $\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ が $h_r(j)=\beta\log_r j$ だけになり、正規化定数は $\log_2\zeta(\beta)$ になる。例えば、$\log_2\zeta(9/8)=3.10\cdots$, $\log_2\zeta(2)=0.71\cdots$, $\log_2\zeta(4)=0.11\cdots$ である。これらは表 4 の $m=0$ の行で確認できる。

$r=2$ では $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ が m の増加に伴って増えていることは次節で解析する。

5.1.3　修正対数スター関数の使用数依存性

$d_{r,\alpha}^{(m)*}$ と $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ は n には依存しないが、$r=2$ では m の増加に伴って増えている。結論から述べると、この主たる成分は $\alpha_2^* m'$ である。このことを以下に示す。

表 1 より、$n=1$ と $n\geq 2$ とでは式 (20) の計算途中で用いられる値が全く異なることが分かる。

$$\begin{aligned} a &= 2^{-\log^*_{2,\alpha_2^*}(1)} = 2^{\alpha_2^*} = 1.44\cdots, \\ b &= 2^{-\log^*_{2,\alpha_2^*}(2)} = 2^{2\alpha_2^*-1} = 1.04\cdots \end{aligned}$$

とおく。$a>b$ であり、更に $j\geq 2$ なる j で $b\geq 2^{-\log^*_{2,\alpha_2^*}(j)}$ である。

式 (20) において、a 以外は b を用いて表して

$$\begin{aligned} & 2^{-h_2(1)}a^{m'} + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-h_2(n)}1^{m'} \\ < \ & p \\ < \ & 2^{-h_2(1)}a^{m'} + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-h_2(n)}b^{m'} \end{aligned}$$

が得られ、変形して

$$\begin{aligned} & a^{m'}2^{-h_2(1)}\left(1+\left(\frac{1}{a}\right)^{m'}\frac{1}{2^{-h_2(1)}}\sum_{n=2}^{\infty}2^{-h_2(n)}\right) \\ < \ & p \\ < \ & a^{m'}2^{-h_2(1)}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^{m'}\frac{1}{2^{-h_2(1)}}\sum_{n=2}^{\infty}2^{-h_2(n)}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。m' の増加に伴い式中の括弧の中は 1 に収束し、p の上界と下界との差は狭まる。よって、

$$\lim_{m'\to\infty}\log_2 p = \alpha_2^* m' - h_2(1)$$

である。$d_{r,\alpha}^{(m)*}$ と $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ が m（および、m'）に依存するのは、このように w_r^* が 1 になるのが $r=2$ では $w_r^*(1)=1$ の場合だけであることから起こっている。

表 3 と表 4 において、$\alpha_2^* m' - h_2(1)$ だけ引いた値を括弧の中に記している。$\alpha_2^* m' - h_2(1)$ は、$\log_{r,\alpha}^{(m)*}|_{r=2}$ では $\alpha_2^*(m-1)+\alpha$、$\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}|_{r=2}$ では $\alpha_2^* m$ である。$\alpha_2^* m' - h_2(1)$ だけ引いた値の $m\to\infty$ での収束値が、α や β に依存せず 0 であることが、表 3 と表 4 にも現れている。

5.2　$r\geq 3$ の場合

5.2.1　準備

式 (18) での m' 個の $\log^*_{r,\alpha_r^*}$ の和の部分を簡単に $g_r^{(m')*}(n)$ とおく。すると、

$$f_{r,m,h_r}(n) \ = \ g_r^{(m')*}(n) + h_r(w_r^{(m')*}(n)) \quad (26)$$

と表せる。h_r の正規化定数（簡単に d_{h_r} と表す）に対する f_{r,m,h_r} の正規化定数の増加量を考える。それを $d(f_{r,m,h_r}|h_r)$ と表す。

表 3 $d_{r,\alpha}^{(m)*}$ の値の例（$r=2$）

$d_{r,\alpha}^{(m)*}$ $\left(\text{and } d_{r,\alpha}^{(m)*} - \alpha_r^*(m-1) - \alpha\right)$

	$u(=\alpha/\alpha_r^*)$				
m	0	1/4	2/4	3/4	7/8
1	1.51	1.95	2.53	3.50	4.48
	(1.51)	(1.81)	(2.27)	(3.11)	(4.02)
2	1.84	2.22	2.75	3.63	4.55
	(1.31)	(1.56)	(1.95)	(2.71)	(3.56)
3	2.17	2.52	2.98	3.78	4.64
	(1.11)	(1.33)	(1.66)	(2.33)	(3.12)
4	2.52	2.83	3.24	3.95	4.74
	(0.93)	(1.11)	(1.39)	(1.97)	(2.69)
5	2.88	3.16	3.52	4.15	4.87
	(0.77)	(0.91)	(1.14)	(1.64)	(2.29)
10	4.99	5.17	5.37	5.66	5.99
	(0.23)	(0.28)	(0.34)	(0.51)	(0.77)
20	10.05	10.19	10.32	10.46	10.54
	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.02)	(0.03)
50	25.90	26.04	26.17	26.30	26.37
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)

表 4 $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ の値の例（$r=2$）

$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ $\left(\text{and } d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*} - \alpha_r^* m\right)$

	β						
m	9/8	5/4	6/4	7/4	2	4	8
0	3.10	2.20	1.38	0.97	0.71	0.11	0.00
	(3.10)	(2.20)	(1.38)	(0.97)	(0.71)	(0.11)	(0.00)
1	3.21	2.40	1.70	1.36	1.15	0.63	0.53
	(2.68)	(1.87)	(1.17)	(0.83)	(0.62)	(0.11)	(0.00)
2	3.35	2.62	2.03	1.76	1.59	1.15	1.06
	(2.29)	(1.56)	(0.98)	(0.70)	(0.53)	(0.10)	(0.00)
3	3.51	2.87	2.39	2.16	2.03	1.67	1.59
	(1.92)	(1.29)	(0.80)	(0.58)	(0.44)	(0.08)	(0.00)
4	3.70	3.16	2.76	2.58	2.47	2.18	2.11
	(1.58)	(1.04)	(0.65)	(0.47)	(0.36)	(0.07)	(0.00)
5	3.93	3.47	3.16	3.02	2.93	2.70	2.64
	(1.28)	(0.83)	(0.51)	(0.37)	(0.29)	(0.06)	(0.00)
10	5.63	5.50	5.42	5.39	5.37	5.30	5.28
	(0.34)	(0.22)	(0.14)	(0.10)	(0.08)	(0.01)	(0.00)
20	10.58	10.58	10.58	10.58	10.57	10.57	10.57
	(0.01)	(0.01)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)

$$\begin{aligned} & d(f_{r,m,h_r}|h_r) \\ = & \left(\log_r \sum_{n=1}^{\infty} r^{-f_{r,m,h_r}(n)}\right) - \left(\log_r \sum_{j=1}^{\infty} r^{-h_r(j)}\right) \\ = & \log_r \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} r^{-h_r(j)} \sum_{n \left| w_r^{(m')*}(n)=j\right.} r^{-g_r^{(m')*}(n)}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} r^{-h_r(j)}} \end{aligned} \tag{27}$$

である。最後の式の $\log_r$ の引数は、h_r による $g_r^{(m')*}$ の加重平均の形をしている。

式 (26) と式 (27) の h_r はクラフト和が 1 ではないが、試しに d_{h_r} を足したものを新たに h_r と考えて（すなわち、クラフト和が 1 になる関数にしてから加重平均をとって）$d(f_{r,m,h_r}|h_r)$ を求めたところ、最終的な式は式 (27) と同じものになった。よって、以下では、正規化定数を含んでいない最初に定義した h_r を用いて加重平均を考える。

5.2.2 $d_{r,\alpha}^{(m)*}|_{r\geq 3}$ の値

$\log_{r,\alpha}^{(m)*}$ については $h_r(j) = \log_r^* j - \alpha w_r^*(j)$ である。なお、$r \geq 3$ では $\alpha_r^* < 0$ であり α は負である。

$r \geq 3$ の例として、$d_{r,\alpha}^{(m)*}\big|_{r=3}$ の算出例を表 5 に示す。

$m = 1$ では、$\log_{r,\alpha}^{(m)*}(n) = h_r(n) = \log_r^* n - \alpha w_r^*(n)$ であり、この $h_r(n)$ について、$d_{h_r} = d_{r,\alpha}^{(1)*}$ である。表 5 では括弧中に d_{h_r} だけ引いた値、すなわち $d(f_{r,m,h_r}|h_r) = d_{r,\alpha}^{(m)*} - d_{r,\alpha}^{(1)*}$ を示している。

以下、$m \geq 2$ での、パラメータの極限での値について触れておく。

まず、m の増加に対して、$d(f_{r,m,h_r}|h_r)$ はある一定値に収束する。それは次のようにしていえる。m の増加は式 (20) でかけ合わせる $\sum$ の数が増えることを意味する。しかし、増えていく $\sum$ に現れる正整数は急速に大きくなっていき、$\sum$ が増えることによる p の増加の比率は急速に 1 に近づく。m を増やしても増加の比率が 1 に収束することで、$m \to \infty$ で $d(f_{r,m,h_r}|h_r)$ は一定値に収束する。具体的な値の一部は、この後で述べる。

次に、α を極限 α_r^* 近くまで大きくする場合（すなわち、$u \to 1$）について考える。

式 (27) の分子の 2 番目の $\sum$ の値（q とおく）が $j \to \infty$ で 1 に収束するするのは、以下のようにしていえる。式 (20) を参考にして、

$$\begin{aligned} q = & \sum_{n_{m'-1}=\exp_r^j(0)}^{\exp_r^{j+1}(0)-1} r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(n_{m'-1})} \\ & \times \sum_{n_{m'-2}=\exp_r^{n_{m'-1}}(0)}^{\exp_r^{n_{m'-1}+1}(0)-1} r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(n_{m'-2})} \\ & \vdots \\ & \times \sum_{n_0=\exp_r^{n_1}(0)}^{\exp_r^{n_1+1}(0)} r^{-\log_{r,\alpha_r^*}^*(n_0)} \end{aligned}$$

である。$m' = 1$ では $q = I_{j,\alpha_r^*}$ であり、式 (24) からいえる。$m' \geq 2$ では、必要なだけ後ろから 1 に収束する $\sum$ を 1 で置き換えて、$j \to \infty$ で $q = 1$ がいえる。

式 (27) の分母と分子に「$\sum_{j=1}^{\infty} r^{-h_r(j)} \times$」の部分を見出すことができる。これで加重平均を取っているが、これは「$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=\exp_r^l(0)}^{\exp_r^{l+1}(0)} r^{-h_r(j)} \times$」と書きなおすことができ、更に、何にもかけ合わせない $\sum_{j=\exp_r^l(0)}^{\exp_r^{l+1}(0)} r^{-h_r(j)}$ だけの値は、$\alpha \to \alpha_r^*$ で 1 のオーダであり、先の式の l が大きくなると 1 に収束する。式 (27) において、l が大きいときの q が支配的になる。以上を総合して、

$$\begin{aligned} \lim_{u\to 1} d(f_{r,m,h_r}|h_r) &= \log_r 1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

である。表 5 でも、左に行くほど括弧中の値が 0 に近づく傾向が確認できる

$u \to \infty$（すなわち、$\alpha \to -\infty$）において、式 (27) は、$-\alpha w_r^*(j)$ が最小となる $j = 1 \sim r-1$ の項だけが支配的になる。よって、$\lim_{u\to\infty} d(f_{r,m,h_r}|h_r)$ は、式 (27) の分母分子の j についての $\sum$ を $\sum_{j=1}^{r-1}$ とした値に収束する。計算すると $1.32\cdots$ である。表 5 に示したよりも巨大な m 及び β の組み合わせで算出したところ、$1.32\cdots$ に近づく傾向が見られた。

5.2.3 $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}|_{r\geq 3}$ の値

$r \geq 3$ の例として、$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}\big|_{r=3}$ の算出例を表 6 に示す。

$m = 0$ では、$\log_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}(n) = h_r(n) = \beta \log_r n$ であり、$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*} = d_{h_r} = \log_2 \zeta(\beta)$ である。表 6 でも括弧中に d_{h_r} だけ引いた値、すなわち $d(f_{r,m,h_r}|h_r) = d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*} - \log_2 \zeta(\beta)$、を示している。

以下、$m \geq 1$ でのパラメータの極限での値について触れておく。

まず、$\beta \to 1$ において、式 (27) は、$r^{-h_r(j)} = \frac{1}{j^\beta}$ が多くの j で同じくらいの重みになり、それで $g_r^{(m')*}$ を評価することになる。小さい j では $\sum r^{-g_r^{(m')*}(n)}$ の部分が 1 と隔たった値であっても、小さくない多くの j で 1 に収束する値であり、β が小さいと 1 に収束する項をより多く加味することになる。

表 5 $d_{r,\alpha}^{(m)*}$ の値の例（$r=3$）

$d_{r,\alpha}^{(m)*}$ $\left(\text{ and } d_{r,\alpha}^{(m)*} - d_{r,\alpha}^{(1)*}\right)$

	$u(=\alpha/\alpha_r^*)$						
m	9/8	5/4	6/4	7/4	2	4	8
1	4.04	3.41	2.78	2.41	2.14	1.12	0.24
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
2	4.04	3.42	2.79	2.43	2.18	1.19	0.37
	(0.00)	(0.01)	(0.01)	(0.02)	(0.04)	(0.07)	(0.13)
3	4.05	3.42	2.81	2.45	2.20	1.26	0.48
	(0.01)	(0.01)	(0.03)	(0.04)	(0.06)	(0.14)	(0.24)
4	4.05	3.43	2.82	2.47	2.23	1.32	0.57
	(0.01)	(0.02)	(0.04)	(0.06)	(0.09)	(0.20)	(0.33)
5	4.05	3.44	2.83	2.49	2.25	1.36	0.64
	(0.01)	(0.03)	(0.05)	(0.08)	(0.11)	(0.24)	(0.40)
10	4.07	3.46	2.88	2.55	2.33	1.52	0.87
	(0.03)	(0.05)	(0.10)	(0.14)	(0.19)	(0.40)	(0.63)
20	4.08	3.48	2.92	2.61	2.40	1.66	1.06
	(0.04)	(0.07)	(0.14)	(0.20)	(0.26)	(0.54)	(0.82)

表 6 $d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ の値の例（$r=3$）

$d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*}$ $\left(\text{ and } d_{r,\alpha_r^*,\beta}^{(m)*} - \log_r \zeta(\beta)\right)$

	β						
m	9/8	5/4	6/4	7/4	2	4	8
0	1.95	1.38	0.87	0.61	0.45	0.07	0.00
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
1	2.00	1.46	1.00	0.78	0.65	0.34	0.28
	(0.04)	(0.08)	(0.13)	(0.17)	(0.19)	(0.27)	(0.28)
2	2.04	1.53	1.12	0.92	0.81	0.56	0.51
	(0.08)	(0.15)	(0.24)	(0.31)	(0.36)	(0.49)	(0.51)
3	2.07	1.59	1.21	1.04	0.94	0.72	0.69
	(0.11)	(0.21)	(0.34)	(0.42)	(0.48)	(0.65)	(0.68)
4	2.10	1.64	1.29	1.13	1.04	0.85	0.82
	(0.14)	(0.26)	(0.41)	(0.51)	(0.59)	(0.78)	(0.81)
5	2.13	1.69	1.35	1.20	1.12	0.95	0.92
	(0.17)	(0.30)	(0.48)	(0.59)	(0.67)	(0.88)	(0.92)
10	2.22	1.84	1.56	1.45	1.39	1.26	1.24
	(0.27)	(0.45)	(0.69)	(0.83)	(0.93)	(1.19)	(1.24)
20	2.31	1.97	1.73	1.64	1.59	1.49	1.48
	(0.35)	(0.58)	(0.86)	(1.03)	(1.14)	(1.42)	(1.47)

よって、

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to 1} d(f_{r,m,h_r}|h_r) &= \log_r 1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

であり、$\beta\to 1$ で m によらず $d^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}=\log_2\zeta(\beta)$ である。表6でも、左に行くほど $d(f_{r,m,h_r}|h_r)$ が0に近づく傾向が確認できる。

次に、$\beta\to\infty$ において、式(27)の重みは、$h_r(j)$ が他より極端に小さくなる $j=1$ に集中する。式(27)で $j=1$ だけで計算すると $1.60\cdots$ である。表6に示したよりも巨大な m 及び β の組み合わせで算出したところ、$d^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}-\log_2\zeta(\beta)$ が $1.60\cdots$ に近づく傾向が見られた。

６　むすび

Ahlswede-Han-Kobayashi によって示されていたオーダが小さい一連の符号語長関数について、クラフト和を1にする正規化定数の値を、関数のパラメータのいくつかの値や極限において算出した。また、2進符号化のみで見られる関数のパラメータ m の増加に伴う正規化定数の増加傾向の要因が、対数スター関数の項の数を与える関数 w^*_r が1になるのが $r=2$ では $w^*_r(1)=1$ の場合だけであることに起因する、ということを明らかにした。

本報告は発表7)をもとにまとめたものである。

謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究(C) 18560396）の助成を受けたものである。

参考文献

1) R. Ahlswede, T.S. Han, and K. Kobayashi, "Universal Coding of Integers and Unbounded Search Trees," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.43, no.2, pp.669–682, March 1997.

2) P. Elias, "Universal codeword sets and representations of the integers," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT–21, no.2, pp.194–203, March 1975.

3) S.K. Leung-Yan-Cheong, and T. Cover, "Some equivalences between Shannon Entropy and Kolmogorov complexity," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT–24, pp.331-338, 1978.

4) J. Rissanen, "A universal prior for integers and estimation by minimum description length," The annals of Statistics, vol.11, no.2, pp.416–431, 1983.

5) V.I. Levenshtein, "On the redundancy and delay of decodable coding of natural numbers," Systems Theory Research, vol.20, pp.149–155, 1968.

6) 中村博文, 村島定行, "長さ情報の定数回拡張を用いた正整数符号," 電子情報通信学会論文誌(A), vol.J88-A, no.11, pp.1381–1391, Nov. 2005.

7) 中村博文, "正整数符号化におけるAhlswede-Han-Kobayashiの実数符号語長関数の定数項の値と再帰性の拡張について," 第6回シャノン理論ワークショップ予稿集, Nov. 2008.

付録１　$\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ のクラフト和について

ここでは５．１．２までに現れる記号を用いる。

式(20)において、末端の一つの $\sum$ の値の下界は1である。上界を s とおく。s は有限である。式(20)の後ろ側の $\sum$ から順に、下界を知りたいなら1で、上界を知りたいなら s で、置き換えると考えると、

$$1^{m'}\sum_{i=1}^{\infty} r^{-h_r(i)} < p < s^{m'}\sum_{i=1}^{\infty} r^{-h_r(i)} \quad (30)$$

と表せる。p が有限になるかどうかは h_r のクラフト和が有限になるかどうかと同値である。$\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ では $h_r(i)=\beta\log_r i$ であり、これを式(30)に用いて $\zeta(\beta)\le p\le s^{m'}\zeta(\beta)$ が得られ、任意の正整数 m について $\log^{(m)*}_{r,\alpha^*_r,\beta}$ のクラフト和は $\beta\le 1$ なら発散し $\beta>1$ なら有限であるといえる。

都城工業高等専門学校
研究報告第 58 号

令和 6 年 1 月印刷
令和 6 年 1 月発行

編集兼発行者：独立行政法人国立高等専門学校機構
都城工業高等専門学校
郵便番号：885-8567
所 在 地：宮崎県都城市吉尾町 473 番地の 1
National Institute of Technology(KOSEN), Miyakonojo College
ADDRESS:473-1 Yoshio-cho, Miyakonojo City,
Miyazaki Prefecture, Japan 885-8567
TEL(0986)47-1109
FAX(0986)47-1111

Research Report
of
National Institute of Technology(KOSEN), Miyakonojo College

No.58

2024

Contents

Research Papers;

****