

## E.R法による微分方程式の指導について

緒方 優

### A Study of Instruction of the Differential Equation by the E.R-Teaching Method

Masaru OGATA

(Received October 1, 2008)

**Abstract** The differential equation is one of the most important fields of mathematics that students in the department of science and engineering should study. The differential equation is a category of mathematics which is the most similar to the world of intuition. However, we learned from the results of the questionnaire survey we had conducted that most of our students who can solve differential equations do not understand the similarity of the equations with the world of intuition. Consequently, we tried to teach our students differential equations by two following teaching methods.

The first one is called the E.R method, by which we lead some types of differential equations from familiar natural and social phenomena. Afterwards, we teach the solution method. The second one is called the R.E method. We first teach several kinds of solution methods of differential equations. Next, we solve familiar natural and social phenomena of our choice by using the aforementioned solution methods.

When we analyzed the questionnaire survey on these teaching methods, we found out that the E.R method is easier for our students to understand than the R.E method. However, the E.R method takes too much time when we guide differential equations. Therefore, this particular method is unpopular among the students. We believe that we can improve educational effects of the E.R method, if we study on how to shorten the time to teach it.

#### 1 はじめに

微分方程式は理工系の学生にとって学ばなければならない数学の1つの分野である。その指導法については多くの研究がなされているが、直観世界を経由した指導法は少ないように思われる。微分方程式は最も直観世界に近い数学の世界であり、直観世界を経由しないで理解させることは難しいと思われる。この研究は直観世界を踏まえた E.R 法（後述）と言われる指導法を用いて微分方程式の指導を行い、それが学生に受け入れられやすい指導法であるかどうかを調査分析したものである。この分析にあたっては通算4年間の事後アンケート調査（平成15年度、平成18年度～20年度）と学校が実施した学生による授業評価（前期分：平成15年度～平成19年

度）等の資料を用いた。ここで、E.R法とは **example**（具体的な現象）から始まって最後に **rule**（数学モデルの作成と解法）にまとめ、それからまた **example** に帰る指導法のことである。逆に、**rule**（数学モデルの解法）を先に指導し、それによればこのような **example** が解析できるという指導法は **R.E** 法（いわゆる従来型指導法）と言われている。

#### 2 E.R法の導入の経緯について

平成11年度および平成12年度の物質工学科と建築学科の3年生には、授業進度の関係から2階微分方程式を4年次に指導することになった。これを機会に、平成13年4月、この2学科に対して3年次に学んだ1階微分方程式の理解度についてのアンケート調査と簡単な微分方程式の小テストを行った。

その結果、1 階微分方程式について「十分に理解、あるいは大体理解できている」と回答した学生は 36% (2 学科平均) で殆どの学生は理解していないことが分った。また、微分方程式とは何なのか、なぜそれを勉強するのか分からないと回答した学生が 56% (2 学科平均、無回答 28%) いた。この中には小テストで完全解答 (正答率 38%) をした学生の一部も含まれていた。このような状況を踏まえて平成 13 年度の 4 年物質工学科と建築学科の学生には、“学生のうわさ”や“寮でのインフルエンザ”が広がって行く過程など身近な自然現象や社会現象等ニュース性の高いものを教材にして E.R 法の指導を試みた。つまり、1 階微分方程式によるこれら現象の数学モデルの作成、また、環境問題として、河川に流れ込んだ汚物等がバクテリア等に分解されながら、汚染源から河口へ拡散していくのを解析する数学モデル (2 階線形微分方程式) の作成など、一連の指導を試みたあと、それらの微分方程式の解法指導を行った。このような授業法についての学生の反応は「興味がある、非常に興味がある」が 47%、「どちらかと言えば興味がある」が 31%、約 80% の学生が肯定的な回答を寄せた。そして、学生による平成 13 年度前期授業評価の質問「授業の準備や工夫はされているか」では肯定的回答「とてもされている、あるいは、されている」は 53% (2 学科平均) であった。翌年の平成 14 年には 10 年ぶりの小・中・高校学習指導要領改定が行われ算数・数学の学習内容が大幅に削減された。本校でも授業内容が検討され、平成 15 年度から微分方程式は 4 年次で指導することになった。そして、それは JABEE 対応科目として全学科共通シラバスで指導することになった。これまでの分析結果を考慮に入れ、引き続き E.R 法を試行することになった。

### 3 E.R 法による微分方程式の指導例

ここでは平成 15 年度前期に 4 年全学科、そして平成 18 年度~20 年度前期に物質工学科と建築学科に試みた E.R 法の具体的な指導について述べる。学生が、驚きや興味を示すのは、身近な自然現象や社会現象など異なった現象から導いた微分方程式が同じタイプの数学モデルになることや、逆に、たった一つの数学モデルでいろいろの分野の多様な状況を表現できることを知ったときである。そして、いったん微分方程式が解けると、多くの問題が効果的に解決できる。例えば考古学のサンプルの年代測定、水の加熱と冷却、などの数学モデルは変数分離形の微分方程式で表され、これらの問題の解決はそれを解くことに帰着する。しかし、自然界にみられ

る現象の多くはあまりにも複雑で、数学的な定式化が容易でないことが多い。そこで、ある現象を数学にのせようとする場合には、それに関連する単純な仮定を設定し、本質的でないと思われる部分を無視したうえで実行される。このようなことを考慮に入れ授業では微分方程式が、1) 線形 1 階微分方程式 (変数分離形) になる現象、2) 非線形微分方程式 (ベルヌーイ型) <sup>1)</sup> そして 3) 線形 2 階微分方程式になるような現象をそれぞれ 2~3 例 (図 1) を与え、その微分方程式を導き出し、それぞれについて解法指導を行った。

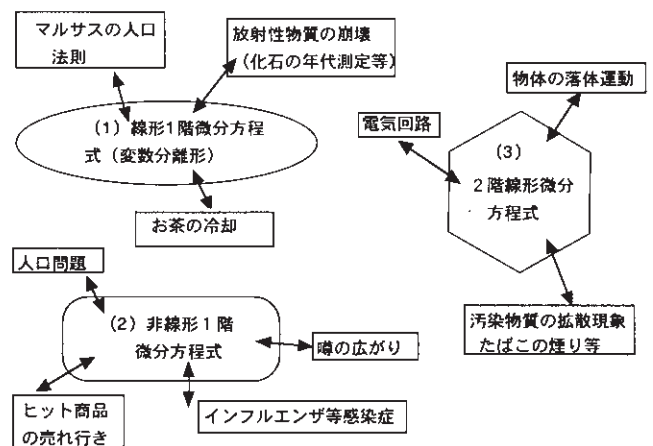


図 1 直観世界と数学の世界

#### 3.1 数学モデルの作成から解法指導まで

はじめに、数学や物理学の基礎的な知識の確認を行い、そして以下に従い指導を行う。1) 現実を観察し問題を設定する。2) 直観の世界から単純化した仮定を幾つか立てる。3) 現実の問題を数学の問題に書きかえる。重要な変数が何であるかを明らかにし、それらの変数相互の関係を前提として立てる。その仮定と相互関係から数学モデルを構成する。4) それにふさわしい数学のテクニックにより、適切な変数について解く。5) 次に、その解を現実の問題の言葉に翻訳する。6) そしてモデルを検証する試み、すなわち理論上の解が現実の状態とうまく一致しているかどうかをチェックする。7) もしそこにより相関性があれば、そのモデルは観測された現象に理論的な説明を与え、より進んだ結果を予測するか、あるいは決定に役立てることができる <sup>2)</sup>。E.R 法による指導例として 3.1.1 の図 2 の (ア) は上記の 1) に、(イ) は 2) に、(ウ) は 3) に、(エ) は 4) に、(オ) は 5) ~7) にそれぞれ対応している。ほとんどの数学教育は、時間等の関係で 1)、2)、3) の過程をお座なりに通過することが多く、4) にだけかかわっていて、5)、6)、7) へと進むことはあまりない。実りある数学教育は、この 1) から 7) までのつながりを重要視することが大切であると考

える。このことが抜けると前述のアンケート結果のような学生の反応が起こると思われる。下記の事例は、二つの移行過程、すなわち、はじめは現実の問題から数学の問題に入る過程、次にそれを解いて数学的解答を現実の問題の言葉に訳し直す過程を学生に指導した事例である。

3. 1. 1 具体的事例<sup>3,4)</sup>と1)~7)に基づいた指導例

事例1 1階線形微分方程式

2003年の春に古代遺跡を発掘中に炭化した木が発見された。この炭化した木の切り出された年代を知らば、この遺跡の年代を推定できる。この炭化した木の放射性炭素の残存量を0.97として、切り出された年代を推定せよ。ただし、生木の放射性炭素量6.68、その半減期は5730年とする。

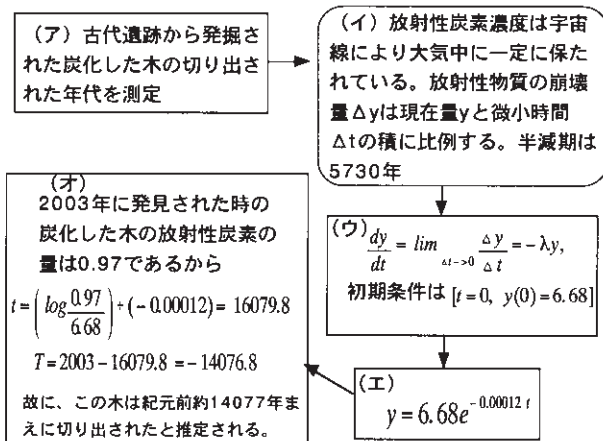


図2 微分方程式で表される数学モデル

事例2 2階線形微分方程式

下水道から汚物が川に一定の割合で連続的に流入しているとする。それと同時に汚物はバクテリアなどの生物活動によって分解されるとする。この汚物の拡散微分方程式を作り、混入したときの汚物の濃度が半分になるにはどの位の距離が必要か調べよ。ただし、汚染源から河口まで20kmとし、汚染源の汚物濃度yは0.004、河口での汚染濃度はゼロと仮定する。つまり、y(0)=0.004、y(20000)=0、α=0または0.0002、β=0.0001とする。

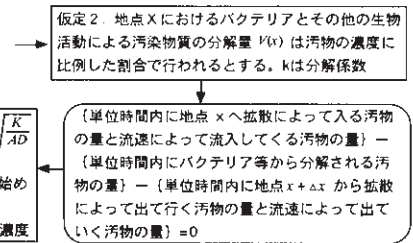
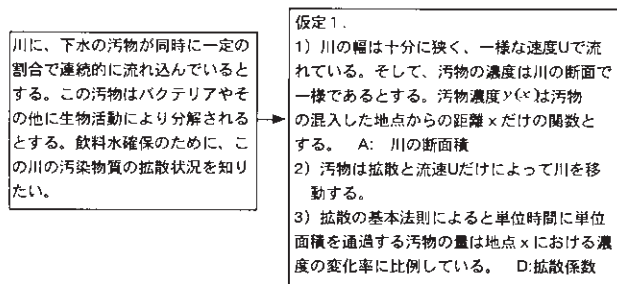
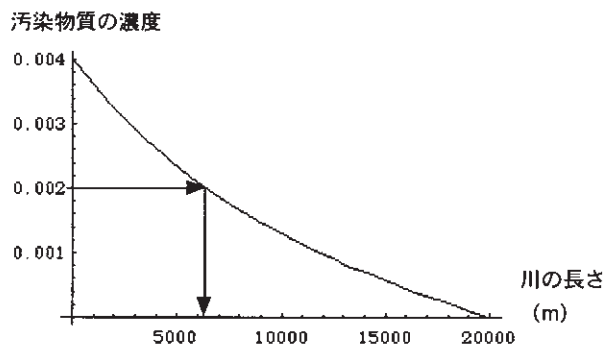


図3 汚物の拡散微分方程式

図4の1)と2)は汚染物質の拡散微分方程式を用いて、学生に汚染物質の濃度が半減する距離を流速等を条件に求めさせ、それを図示したものである。

- 1) 流速Uがゼロ: α=0, β<sup>2</sup>={バクテリア等による分解の比例定数}÷{川の断面積×拡散係数}=0.0001<sup>2</sup>; DSolve[{y''[x]-0 y'[x]-0.0001<sup>2</sup> y[x]==0, y[0]==0.004, y[20000]==0], y[x], x]



- 2) 流速 U=0.008m/s; α=0.0002, β<sup>2</sup>={バクテリア等による分解の比例定数}÷{川の断面積×拡散係数}=0.0001<sup>2</sup>; DSolve[{y''[x]-0.0002 y'[x]-0.0001<sup>2</sup> y[x]==0, y[0]==0.004, y[20000]==0], y[x], x]

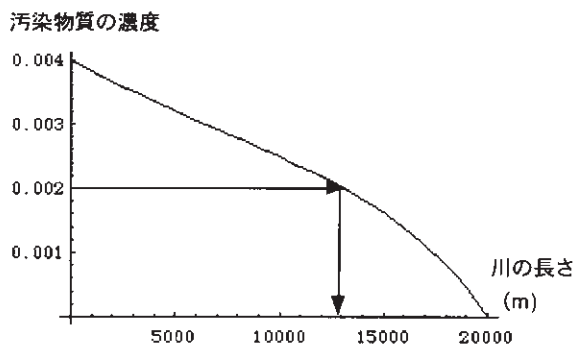


図4 汚染物質の拡散 1)、2)

4 事後アンケート調査とその分析

アンケート調査対象者 都城高専4年生: アンケート調査実施日: 2階斉次線形微分方程式の指導の終わった段階: 平成15年6月初旬、調査総数171人(機械工学科41、電気工学科46、物質工学科41、建築学科43: 有効回答160); 平成18年~平成20年の6月初旬、調査総数247人(物質工学科131、建築学科116: 有効回答238)。質問数は6~7問:

主な質問項目:①授業の理解を深めるための方法(現象から微分方程式を導くことについての是非)について、②どのような授業方法がよいか(E.R法がよいか、あるいはR.E法がよいか等)③微分方程式を導くための興味ある現象等。アンケートは無記名であるが成績と比較するため回答者と対応できるよう工夫した。

#### 4.1 授業の理解を深める方法に関する質問

平成15年度(全学科単純集計)について、この質問に対して1)「身近な物理現象や社会現象から微分方程式を導く過程が必要」に回答した学生は47%、2)「どちらでもよい」が31%、そして、3)「微分方程式を導く必要なし」が8%、4)「分からない」が14%であった。学科間のクロス分析では有意差(5%)が認められ、電気工学科と物質工学科が「身近な物理現象や社会現象から微分方程式を導く過程が必要」、機械工学科と建築学科は「どちらでもよい」が、それぞれ1番多かった。平成18年度～平成20年度について、建築学科と物質工学科では学科間および年度間のクロス分析では有意差(5%)は認められなかった。物質工学科と建築学科については、1)「身近な物理現象や社会現象から微分方程式を導く過程が必要」と回答した学生は48%、2)「どちらでもよい」22%、3)「分からない」が20%、4)「微分方程式を導く必要ない」が10%であった。

#### 4.2 授業方法への質問

##### 4.2.1 平成15年度の分析

全学科統合した単純集計:この質問に対して1)「E.R法が良い」に回答した学生が30%、2)「R.E法が良い」が42%、3)「理論的解法だけで良い」が9%、4)「どちらでも良い」が12%、そして、5)「分からない」が7%であった。授業方法の選択が学科により異なるかどうかクロス分析した結果、授業方法の選択について学科間に有意差(5%)が認められた。学科別では、電気工学科と機械工学科ではR.E法が良いが1位で、それぞれ61.4%と55.3%であった。建築学科と、物質工学科ではE.R法が良いが1位で、それぞれ47.2%と39%であった(図5)。つぎに、E.R法またはR.E法を選択した学生の主な理由(記述式)を下記のように分類した。括弧内の数は類似の回答数である。まず、E.R法を選択した学生(48人)は、その理由として、ア)「微分方程式が導かれる過程が分かり、解法の勉強に興味が出た。」が15人(31%)、イ)「いろいろな自然現象等を微分方程式で表現できることが分かった」が

10人(21%)、一方、R.E法を選択した学生(67人)は、ウ)「最初に解法を勉強し、その後、応用として身近な自然現象等を扱った方がスッキリする」が18人(27%)、エ)「先に身近な自然現象等から微分方程式を導くことは納得できるが時間がかかり過ぎる、その後、解法を学ぶのはウンザリする」が17人(25%)であった。

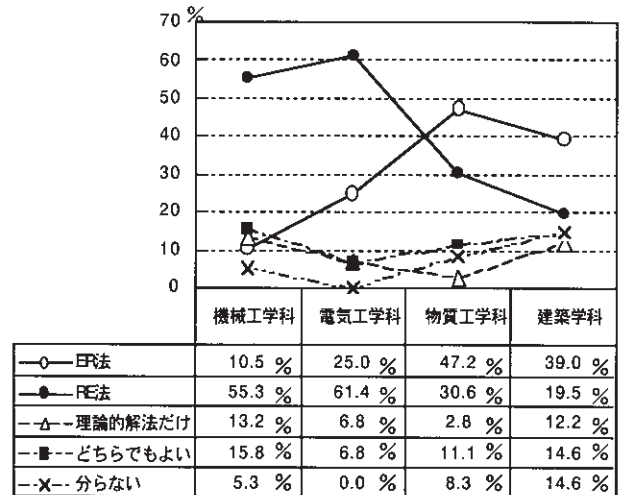


図5 H15年度:理解しやすい授業法の学科別比較

##### 4.2.2 平成18年度～平成20年度の分析

物質工学科と建築学科を統合した単純集計:この質問に対する3カ年の平均では1)「E.R法が良い」に回答した学生が32%、2)「R.E法が良い」が41%、3)「理論的解法だけで良い」が5%、4)「どちらでも良い」が13%、そして、5)「分からない」が9%であった。授業方法の選択を学科別に比較分析した結果、授業方法については学科間に有意差(5%)が認められた。学科別に見ると、物質工学科と建築学科ではR.E法が良いがそれぞれ37.5%と45.5%で、E.R法が良いがそれぞれ37.5%と25.5%であった(表1)。

	ER法	RE法	理論的解法だけでよい	どちらでもよい	分らない
物質工学科	37.5 %	37.5 %	4.7 %	6.3 %	14.1 %
建築学科	25.5 %	45.5 %	3.6 %	20.0 %	5.5 %

表1 学科別 分かりやすい授業法の比較

つぎに、E.R法またはR.E法を選択した学生の主な理由(記述式)は4.2.1と同様に分類した。E.R法を選択した学生は全体で76人、その理由として、ア)「微分方程式が導かれる過程が分かり、解法の勉強に興味が出た。」が28人(37%)、イ)「いろいろな自然現象等を微分方程式で表現できることが分かった」が21人(28%)、一方、R.E法を選択した学生は全体で98人、その理由としてウ)「最初に解法を勉強し、その後、応用として身近な自然現象等

を扱った方がスッキリする」が 30 人 (31%)、エ) 「先に身近な自然現象等から微分方程式を導くことは納得できるが時間がかかり過ぎる、その後、解法を学ぶのはウンザリする」が 32 人 (33%) であった。このエ) の学科別内訳は、建築学科が 20 人 (40% : 建築学科 50 人中)、物質工学科が 12 人 (25% : 物質工学科 48 人中) である。また、エ) の記述数の比率を各年度で見ると平成 15 年度が 25%、平成 18 年度が 32%、平成 19 年度が 30% として平成 20 年度が 36% で増加傾向にある (平成 18 年度~平成 20 年度の平均は 33%)。この比率のばらつきは毎年、指導例題を変えたための変動と考えられる (例えば平成 18 年度は化石の年代推定とタバコの煙の拡散<sup>5)</sup>)。以上のことからエ) には E.R 法の改善点が含まれていると考えることができる。また、E.R 法の選択比率の回帰式は  $y = -0.65x + 43.225$  となるが、この式の有効性を評価するための指標である寄与率は 0.037 と小さいことから、年々、選択比率が減少傾向にあるとは判定し難い (表 2)。一方で、学生による前期授業評価の質問事項「この授業の準備や工夫がなされているか」への肯定的回答率の回帰式は  $y = 7.51x - 76.79$  となり、この式の有効性を評価する寄与率は 0.684 となることから、授業法の改善は年々進んでいると推測される。これらのことから、E.R 法は学生に理解しやすい授業法として受け入れられていると考えられる (図 6、図 7)。

授業法	H15年度	H18年度	H19年度	H20年度
ER法	30.4 %	42.0 %	25.3 %	28.4 %
RE法	41.7 %	35.8 %	48.2 %	39.2 %
理論的解法だけ	8.7 %	0.0 %	8.4 %	6.8 %
どちらでもよい	12.1 %	16.0 %	7.2 %	16.2 %
分からない	7.1 %	6.2 %	10.8 %	9.5 %

表 2 理解しやすい授業法の年度別比較 (物質・建築統合)

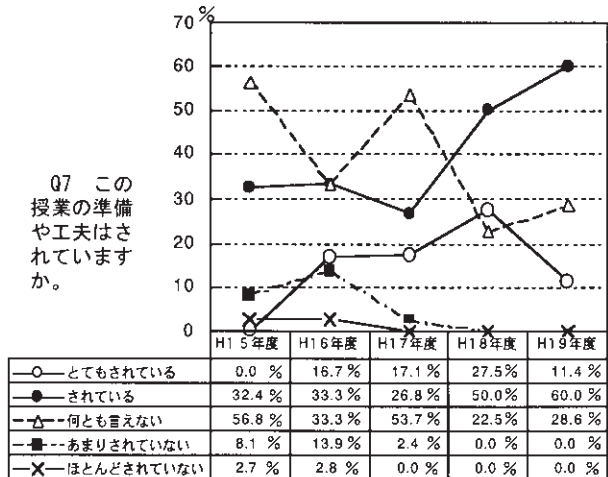


図 6 物質工学科 前期授業評価アンケート

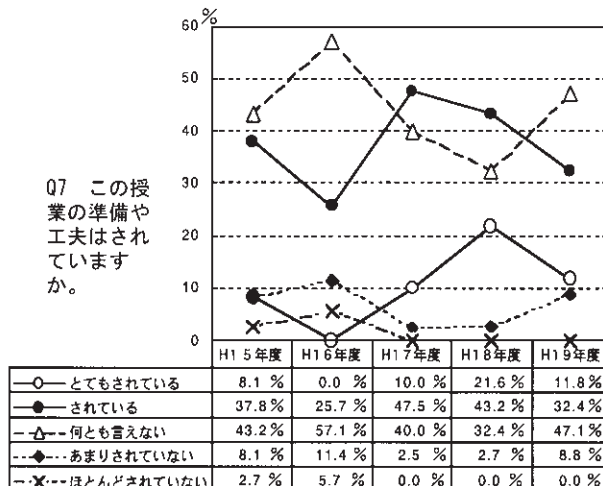


図 7 建築学科 前期授業評価アンケート

### 4.3 興味ある授業教材に関する質問

単純集計:平成 15 年度の興味ある教材の選択は、1) 「物理現象 (例えば、落体運動や振り子の運動)」が 20.7%、2) 「身近な環境問題や社会問題 (インフルエンザ等)」が 37%、3) 「両方とも必要である」と回答した学生が 41%、そして、4) 「その他」が 2% であった。理解しやすい授業方法と興味ある授業教材 (物理現象と社会現象等) との関係性をクロス分析した結果、有意差 (5%) が認められた。物理現象を選んだ学生の中で R.E 法を選んだ学生は E.R 法を選んだ学生の約 5 倍おり、R.E 法と E.R 法の違いが特徴付けられたが、両方の教材とも必要と回答した学生は全体の 41% を占めた。学科別では電気工学科と建築学科の学生が両方の教材とも必要である、を第 1 位に上げ、機械工学科と物質工学科は社会現象を第 1 位に上げている。共通しているところは、専門は異なっても自然現象だけでなく社会現象等にも興味を示していることである (図 8)。

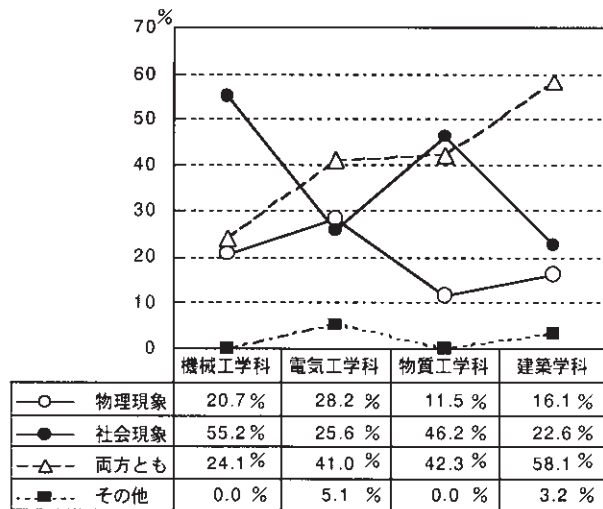


図 8 H15年度 学科間の興味ある教材の比較

それから、物質工学科と建築学科については、教材（4.2.2 で述べた平成 18 年度の教材参照）によって授業法の選択や授業への取り組みに変化がでていることが表 2 や平成 18 年度前期授業評価から読み取れる（図 9、図 10）。さらに、表 3 の年度別の学生による前期授業評価から平成 18 年度は他の年度より理解度が高いことが分かる。このように興味を持てる授業法や教材であれば理解度も上がることが分かった。最後に、物質工学科と建築学科の平成 15 年度、平成 18 年度～平成 20 年度の興味ある授業教材（具体例）の選択の変化は地球環境問題への関心の高まりと関係してか社会現象等への関心が増加傾向にあるように思われる（図 11）。

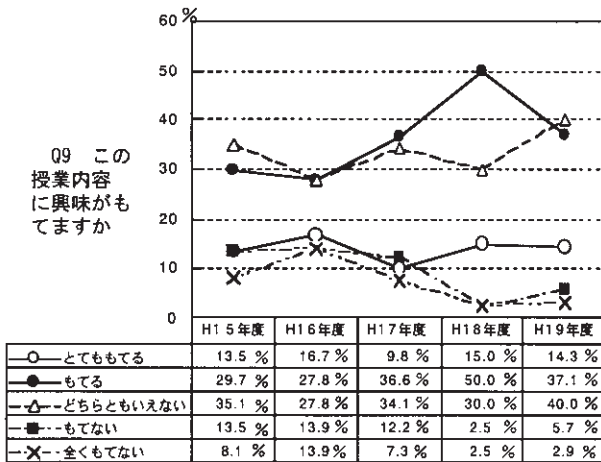


図9 物質工学科 前期授業評価アンケート

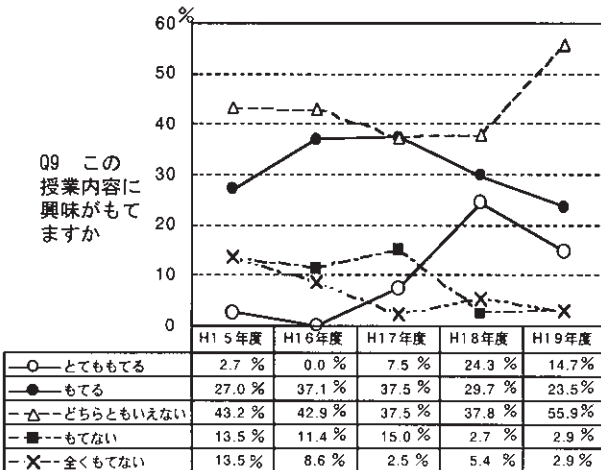


図10 建築学科 前期授業評価アンケート

前期授業評価	H15年度	H16年度	H17年度	H18年度	H19年度
よく理解	2.7%	2.8%	2.4%	10.0%	2.9%
大体理解	18.9%	27.8%	29.3%	50.0%	47.1%
半分位理解	48.6%	36.1%	48.8%	35.0%	47.1%
殆ど理解なし	24.3%	22.2%	17.1%	5.0%	2.9%
全く理解なし	5.4%	11.1%	2.4%	0.0%	0.0%

表3 この授業をどのくらい理解できたか(物質・建築 統合)

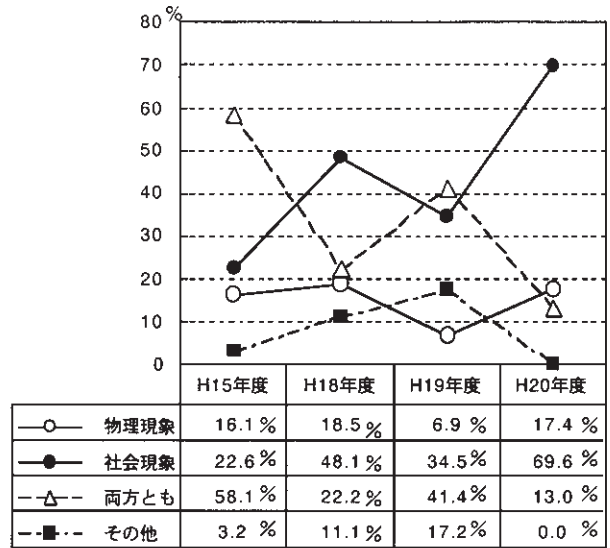


図11 H15、H18～H20年度 興味ある教材の年度別比較(物質・建築 統合)

#### 4.4 授業方法と前期中間試験成績について

テストは学生の学力を測る1つの方法である。そこで学力と理解しやすい指導法の選択の関係を調査するため、4年次の前期中間試験成績とのクロス分析を行って見た。その結果、平成 15 年度（全体）については有意差（5%）が認められた。E.R 法の選択は、成績の振るわない学生に多く、成績の良い学生ほど少なくなっているように思われる。逆に、R.E 法の選択については、成績の良い者が多いように思われる（図 12）。しかし、平成 18 年度～平成 20 年度については、クロス分析の結果、成績の振るわない学生と成績の良い学生との間に授業法の選択に有意差（5%）は認められなかった。

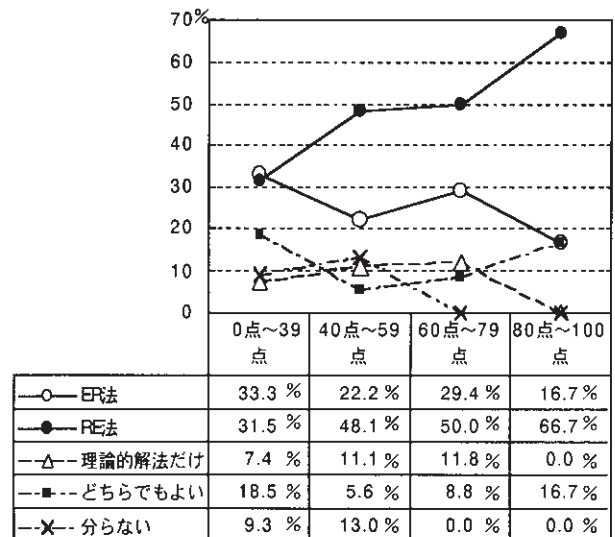


図12 H15年度 理解しやすい授業法の選択と前期中間試験成績との関係

## 5 まとめ

数学教科書等はどちらかと言えば R.E 法による記述が多いように思われる。指導する側からは時間配分等を考えると R.E 法が指導しやすいように思われるが、学ぶ側からは内容によってはこの指導法は理解しがたい一面をもっているように思われる。このことを踏まえ平成 15 年度から平成 20 年度にかけて E.R 法を用いて微分方程式の指導を試行した結果、数値的評価は年度によっては R.E 法より高くはなかったが、総合的には学生は自然な指導法として E.R 法を受け入れているように思われる。高専は実践的技術者を養成する機関であるから、理論と実際がうまく対応できるように指導するのが基本であること議論をするまでもない。他高専では3年次で微分方程式を終えているところがあるが、冒頭、述べたように微分方程式は直観世界に一番近い数学の世界であるから、その指導に入る前にまず、十分時間をかけて微分積分学を指導することが必要であると考え。その後、E.R 法による指導、つまり、さきに、自然現象等から微分方程式を導き、それから、その解法と、いろいろな現象の解析を行う指導法が学生には必要であると思われる。しかし、E.R 法の導入に当たっては学生が興味を示す教材でかつ数学モデルの作成時間等を考慮した教材を選ぶことが必要であると考え。今後も専門学科との連携も視野に入れた教材開発と指導法の研究を継続する必要があると考え。

## 謝辞

この指導法を試行するにあたり、貴重なご助言・御指導を頂いた本校教員若生潤一准教授（応用物理学）および学生による授業評価に関する資料の提供や検索に協力頂いた川畑亜希子事務補佐員に感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 佐藤総夫:自然の数理と社会の数理,日本評論社, 1987
- 2) デビッド・バージェス,モラグ・ボリー:微分方程式で数学モデルを作ろう,日本評論社,1998
- 3) 広瀬健他:数学的方法,共立出版,1984
- 4) E.L リース他:やさしい微分方程式,現代数学社, 1981
- 5) 中尾慎宏:概説微分方程式,サイエンス社,1999