有向グラフ上のパーコレーション

田中　守　(東北大学)*

パーコレーションとは、無限グラフの”ランダムな”部分グラフの性質を調べる分野である。特に、ボンドパーコレーションは辺の存在する割合のパラメータ$0 \leq p \leq 1$を用いて、連結部分グラフの大きさの期待値を評価したり、無限連結部分グラフが存在するpの極小値などを求めることが重要である。パーコレーションには、他にもサイトパーコレーション、有向パーコレーション、連続パーコレーション等々いろいろある([1] 参照)が、ここでは各頂点が周りの頂点をランダムにいくつか選んで繋がるようなパーコレーションを考えたい。

自然数$d \geq 2$を固定し、$G = (V, E)$をd-正則、頂点推移的な、連結無限単純有向グラフで$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$を満たすものとする。例えば、有限生成無限群の有向ケーリーグラフや、正方格子、三角格子、六方格子に最近接頂点への有向辺を与えたもののように、いくつかの (平面または双曲) タイリング (平面充填) の頂点と有向辺から成る有向グラフなどがある。

$G = (V, E)$に対し、$x \in V$の周りの頂点集合を$L_x := \{y \in V \mid (x, y) \in E\} = \{x(1), x(2), \ldots, x(d)\}$とする。このとき$\Omega := \prod_{x \in V} \mathcal{P}(L_x)$とすると($\mathcal{P}(L_x)$は$L_x$の部分集合族)、その各元$\omega \in \Omega$は$E_\omega := \{(x, y) \in E \mid x \in V, y \in \omega\}$により、頂点集合が$V$の$G$の部分有向グラフ$G_\omega = (V, E_\omega)$と$1:1$に対応する。各$x \in V$における射影$\pi_x : \Omega \ni \omega \mapsto \omega(x) \in \mathcal{P}(L_x)$に対して、$\mathcal{F}$を$\cup_{x \in V}\{\pi_x^{-1}(S) \mid S \subset L_x\}$で生成される$\Omega$上の$\sigma$-加法族とする。$\mathrm{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_d)$を

$$p_0, p_1, \ldots, p_d \geq 0 \quad \text{かつ} \quad p_0 + p_1 + \cdots + p_d = 1$$

を満たすものとする。各$x \in V$と各$\{x(i_1), \ldots, x(i_k)\} \subset L_x$に対して、$\mu_x$を

$$\mu_x(\omega(x) = \{x(i_1), \ldots, x(i_k)\}) = \frac{p_k}{{}_dC_k} = \frac{k!(d-k)!}{d!} p_k$$

と定義し、$(\Omega, \mathcal{F})$上の確率測度を$P_{\mathrm{p}} := \prod_{x \in V} \mu_x$と定義する。$\mu_x(\omega(x) = \{x(i_1), \ldots, x(i_k)\})$は、部分グラフ$G_\omega$が「頂点$x$から出ている有向辺の終点の集合が$\{x(i_1), \ldots, x(i_k)\}$である」ような部分有向グラフである確率を表している。特に、$\mathrm{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_d)$の各$p_k$は頂点から出る有向辺の数が$k$本である確率、つまり$P_{\mathrm{p}}(|\omega(x)| = k)$を表している。

G_ωの辺集合E_ωに対し$\overline{E_\omega} := \{(y, x) \in E \mid (x, y) \in E_\omega\}$とする。$G_\omega$で$x, y \in V$が弱連結$x \leftrightharpoons y$ (強連結$x \leftrightarrow y$)であるとは、$x = y$, または$z_1, \ldots, z_k \in V$が存在して、$(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_k, y) \in E_\omega \cup \overline{E_\omega}$ (resp. $(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_k, y) \in E_\omega \cap \overline{E_\omega}$) を満たすこととする。$G$の原点$o \in V$を固定する。(以下の議論は原点の取り方に依らない。) 頂点集合$C_\omega := \{x \in V \mid x \leftrightharpoons o \text{ in } G_\omega\}$を弱クラスター、$\tilde{C}_\omega := \{x \in V \mid x \leftrightarrow o \text{ in } G_\omega\}$を強クラスターという。

ここでは、「$\mathrm{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_d)$がどのような条件を満たせば、弱 (強) クラスターが無限集合になる確率が0または正になるか?」という問題を考えたい。ここで、$\mathrm{p} =$

2010 Mathematics Subject Classification: 82B43, 05C20
キーワード：パーコレーション, 有向グラフ
* 〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1 東北大学原子分子材料科学高等研究機構（AIMR）
e-mail: mamoru.tanaka.c6@tohoku.ac.jp
web: http://www.wpi-aimr.tohoku.ac.jp/mathematics_unit/mamoru_tanaka/

$(p_0, p_1, \ldots, p_d), \mathrm{p}' = (p'_0, p'_1, \ldots, p'_d)$ に対して、$p_i + \cdots + p_d \le p'_i + \cdots p'_d$ $(0 \le i \le d)$ のとき、$P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) \le P_{\mathrm{p}'}(|C_\omega| = \infty)$, $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) \le P_{\mathrm{p}'}(|\tilde{C}_\omega| = \infty)$ であることは容易に分かる。G が d-正則有向木の場合には、マルチタイプ分岐過程を用いれば、これらを計算できる:

命題 1 ([2]). G が d-正則有向木 $(d \ge 3)$ であり、$\mathrm{p} = (0, 1-q, q, 0 \ldots, 0)$ のとき、$0 < p_{c,2}(T_d) := \frac{1}{(d^2-d-1)+\sqrt{(d^2-d-1)^2-(d-1)^2}} \approx \frac{1}{2d^2} < 1$ に対して、$P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) > 0$ と $q > p_{c,2}(T_d)$ は同値。特に、$p_0 + p_1 \ge 1 - p_{c,2}(T_d)$ ならば $P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) = 0$ であり、$p_2 + \cdots + p_d > p_{c,2}(T_d)$ ならば $P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) > 0$ である。

命題 2 ([2]). G が d-正則有向木 $(d \ge 3)$ であり、$1 \le k \le d-1$ で $p_k = 1-q$, $p_{k+1} = q$ のとき、$P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) > 0$ と、$q > \frac{d-k(k-1)}{2k}$ は同値である。特に、もし $k(k-1) \le d < (k+1)k$ のとき、$p_0 + \cdots + p_k = 1$ ならば $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) = 0$ であり、$p_{k+1} + \cdots + p_d = 1$ ならば $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) > 0$ である。

より一般に、最初に与えた有向グラフ $G = (V, E)$ に対して次が成り立つ:

定理 1 ([2]). (1) $p_0 + p_1$ が十分 1 に近いならば $P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) = 0$

(2) $k(k-1) < d$ である k に対し、$p_0 + \cdots + p_k$ が十分 1 に近いならば $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) = 0$

G が平面グラフであるとは、G が端点と逆辺以外で各辺が交叉しないように平面 $\mathbb{R}^2$ に埋め込め、さらに埋め込んだ各辺は線分であり、その長さは一定の値以上かつ一定の値以下であるようにできることである。このとき、この埋め込みを用いて G の双対グラフ $G^* = (V^*, E^*)$ が定義できる。G^* の原点 $o^* \in V^*$ を固定する。$\sigma_{G^*}(n)$ を G^* 中の o^* から出発する長さ n の self-avoiding path の本数とし、$\lambda(G^*) := \lim_{n\to\infty} \sigma_{G^*}(n)^{\frac{1}{n}}$ とする。d^* を G^* の各頂点から出る辺の本数の最大値とすると、$1 \le \lambda(G^*) \le d^* - 1$ である。

定理 2 ([2]). G を最初に与えた無限有向グラフで、平面グラフとする。このとき

(1) $k = d$ または $\lambda(G^*) < \left(\frac{d}{d-k}\right)^2$ を満たす k に対して、$p_k + \cdots + p_d$ が十分 1 に近いならば $P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) > 0$.

(2) $k = d$ または $\lambda(G^*) < \frac{d}{d-k}$ を満たす k に対して、$p_k + \cdots + p_d$ が十分 1 に近いならば $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) > 0$.

これを用いると、正方格子 $(d = 4)$, 三角格子 $(d = 6)$, 六角格子 $(d = 3)$ に対して、$p_2 + \cdots + p_d$ が十分 1 に近いならば $P_{\mathrm{p}}(|C_\omega| = \infty) > 0$ であり、$p_3 + \cdots + p_d$ が十分 1 に近いならば $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) > 0$ であることが分かる。特に、$d = 6$, $k = 3$ のとき $d = k(k-1)$ であるが、$p_3 = 1$ とすると、三角格子 $(d = 6)$ は $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) > 0$ を満たす。よって、d-正則有向木のように $d = k(k-1)$ だからと言って、$p_k = 1$ のとき $P_{\mathrm{p}}(|\tilde{C}_\omega| = \infty) = 0$ であるとは限らない。

参考文献

[1] G. Grimmett, *Percolation*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] M. Tanaka, A percolation on directed graphs, arXiv:1604.00371.