Property (T_{L^Φ}) for Orlicz spaces L^Φ

田中　守　(東北大学 AIMR)*

1. 導入

Γ を有限生成群とし、S をその生成元集合とする。また、B を Banach 空間とする。

(1) Γ が性質 (T_B) を持つとは、Γ の B への任意の線形等長表現 $\rho : \Gamma \to O(B)$ から作られる固定ベクトル集合 $B^{\rho(\Gamma)}$ による商表現 $\rho' : \Gamma \to O(B/B^{\rho(\Gamma)})$ に対し、或る $\kappa > 0$ が存在し

$$\inf_{v \in B/B^{\rho(\Gamma)}; \|v\|=1} \max_{\gamma \in S} \|\rho'(\gamma)v - v\| \geq \kappa$$

を満たすことである。

(2) Γ が性質 (F_B) を持つとは、Γ の B への任意のアフィン等長作用が有界軌道を持つことである。

特に B が Hilbert 空間のとき、性質 (T_B) は Kazhdan の性質 (T) であり、性質 (F_B) は Serre の性質 (FH) である。有限生成群に対し、Kazhdan の性質 (T) と Serre の性質 (FH) は同値である。この同値性以外にもこれらは幾何学的群論において非常に興味深い性質を多く持つ。性質 (T_B) と性質 (F_B) については以下が知られている。

定理 1 ([1]). Γ を有限生成群とし、B を Banach 空間とする。

(1) Γ が性質 (F_B) を持つならば、性質 (T_B) も持つ。

(2) Γ が或る $1 < p < \infty$ に対し性質 $(T_{L^p([0,1])})$ を持つならば、性質 (T) を持つ。

(3) Γ が性質 (T) を持つならば、任意の $1 \leq p < \infty$ と任意の σ-有限測度空間 (Ω, μ) に対し性質 $(T_{L^p(\Omega,\mu)})$ を持つ。

(4) 或る定数 $C \geq 2$ 以上の p に対し、有限生成群が性質 (FH) を持つことと性質 (F_{L^p}) を持つことは一般には同値でない。

以下、このような関係を L^p 空間の一般化である Orlicz 空間で考察したい。

凸偶関数 $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ で $\Phi(0) = 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$ を満たすものを Young 関数という。Young 関数 Φ の Legendre 変換を $\Phi^* : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$、つまり $\Phi^*(y) := \sup\{|y|x - \Phi(x) : x \geq 0\}$ とする。Φ^* も Young 関数である。Young 関数 Φ と σ-有限測度空間 (Ω, μ) に対し、関数空間

$$L^\Phi(\Omega, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \text{可測関数, 或る}\, a > 0\, \text{に対し} \int_\Omega \Phi(a|f|) d\mu < \infty \right\} / \sim$$

を Orlicz 空間という。ただし、$f \sim g$ は $f = g$ a.e. である。$f \in L^\Phi(\Omega, \mu)$ に対し、

$$\|f\|_{(\Phi)} := \inf\{b > 0 \mid \int_\Omega \Phi(\frac{|f|}{b}) d\mu \leq 1\}$$

を f の Luxemburg ノルムといい、このとき $(L^\Phi(\Omega, \mu), \| \|_{(\Phi)})$ は Banach 空間である。例えば、$\Phi_p(t) = t^p$ $(p \geq 1)$ のとき、$L^{\Phi_p}(\Omega, \mu) = L^p(\Omega, \mu)$ であり、$\Phi_\infty(s) := 0$ $(s \in [-1, 1])$; $\Phi_\infty(s) := +\infty$ (それ以外) のとき $L^{\Phi_\infty}(\Omega, \mu) = L^\infty(\Omega, \mu)$ である。

* e-mail: mamoru.tanaka@wpi-aimr.tohoku.ac.jp

2. 結果

定理 2. Γ を有限生成群とし、Φ を $0 < \Phi(t) < \infty$ ($t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) を満たす Young 関数とする。このとき、$\Gamma$ が任意の確率空間 (Ω, μ) に対し性質 $(T_{L^{\Phi}(\Omega,\mu)})$ を持つならば、性質 (T) を持つ。

この結果と定理 1 の (1) を併せると次が導かれる。

系 3. Γ を有限生成群とし、Φ を $0 < \Phi(t) < \infty$ ($t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) を満たす Young 関数とする。このとき、$\Gamma$ が任意の確率空間 (Ω, μ) に対し性質 $(F_{L^{\Phi}(\Omega,\mu)})$ を持つならば、性質 (FH) を持つ。

これらの結果から、非常に一般的な Young 関数に対して性質 $(F_{L^{\Phi}(\Omega,\mu)})$ から性質 (FH) が導かれることが分かる。一方で、L^p 空間の場合に示されているように、この系の逆は一般には成り立たない (定理 1 の (4))。

定理 4. Γ を有限生成群とし、Φ と Φ^* は以下を満たす Young 関数とする。

(1) $0 < \Phi(t) < \infty$ ($t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$)

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\Phi^*(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi^*(x)}{x} = \infty$

(3) 狭義凸、つまり任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $t \in [0, 1]$ に対し

$$\Phi(tx + (1-t)y) < t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y), \quad \Phi^*(tx + (1-t)y) < t\Phi^*(x) + (1-t)\Phi^*(y)$$

(4) 任意の $0 < a < 1$ に対し、或る $0 < \delta_a < 1$ と或る $x_0 \geq 0$ が存在し、$x \geq x_0$ に対し、

$$\Phi\left(\frac{x + ax}{2}\right) \leq (1 - \delta_a)\frac{\Phi(x) + \Phi(ax)}{2}, \quad \Phi^*\left(\frac{x + ax}{2}\right) \leq (1 - \delta_a)\frac{\Phi^*(x) + \Phi^*(ax)}{2}$$

(5) $s \mapsto \Phi'(s)/s$ は単調関数、ここで Φ' は Φ の右微分

(6) ある $1 \leq p \leq q < \infty$ が存在して、或る区間 (s_0, ∞) において $\Phi(s)/s^p$ は非減少関数かつ $\Phi(s)/s^q$ は非増加関数

このとき、Γ が性質 (T) を持つならば、Γ は性質 $(T_{L^{\Phi}([0,1])})$ を持つ。

注意 5. (i) $1 < p < \infty$ に対して $\Phi_p(t) = t^p$ は、この定理の仮定 (1) から (6) を満たす。

(ii) 条件 (1) から (4) が成り立つとき、$L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間である ([2])。

(iii) 条件 (1), (2), (5), (6) が成り立つとき、$L^{\Phi}([0, 1])$ と $L^2([0, 1])$ の単位球面は互いに一様同相であり、共役によりそれぞれの線形等長変換群の同形を導く ([3])。

参考文献

[1] U. Bader, A. Furman, T. Gelander, and N. Monod, *Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces*, Acta Math. 198 (2007), no. 1, 57–105

[2] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[3] S. Delpech, *Modulus of continuity of the Mazur map between unit balls of Orlicz spaces and approximation by Hölder mappings*, Illinois J. Math. 49 (2005), no. 1, 195–216