

Multi-way expansion constants and expander graphs

田中 守 (Mamoru Tanaka)* 東北大学 (Tohoku University)

1 多分割等周定数

グラフはループや多重辺を持たない無向グラフとする。

有限グラフ $G = (V, E)$ の等周定数 (または expansion constant) とは

$$h(G) := \min_{FCV} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \leq |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

である。ここで ∂F は F と $V - F$ を結ぶ辺の集合を表す。この等周定数はグラフの連結性の強さを表している。Lee-Gharan-Trevisan [LGT12] は等周定数を $1 \leq k \leq |V|$ に対して

$$h_k(G) := \min \left\{ \max_{i=1,2,\dots,k} \frac{|\partial V^i|}{|V^i|} : V = \bigsqcup_{i=1}^k V^i (\text{直和}), V^i \neq \emptyset \right\}$$

と一般化した。これを G の k -分割等周定数と呼ぶ。 k -分割等周定数は

$$0 = h_1(G) \leq h(G) = h_2(G) \leq h_3(G) \leq \dots \leq h_{|V|}(G)$$

を満たす。また各 $k \geq 1$ に対し「 $h_k(G) = 0$ かつ $h_{k+1}(G) > 0$ であること」と「 G の連結成分の個数が k であること」が同値である。さらに G のすべての連結成分からなる族を $\{G^i\}_{i=1}^k$ とすると

$$h_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\dots,k} h(G^i) \tag{1}$$

が成り立つ。ここではこのような G の分割に関する性質を考察する。

G の誘導部分グラフとは、 $V_H \subset V$ かつ $E_H = \{xy \in E : x, y \in V_H\}$ を満たすグラフ $H = (V_H, E_H)$ である。 G の k 分割とは、 G の誘導部分グラフの族 $\{G^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ で V^i らが互いに共通部分を持たないものである。 G の任意の k 分割 $\{G^i\}_{i=1}^k$ に対して簡単に

$$h_{k+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\dots,k} h(G^i)$$

が示せる。一方で、以下が成り立つ:

*mamoru.tanaka@wpi-aimr.tohoku.ac.jp

定理 1 ([Tan]). もし或る k に対して $h_{k+1}(G)/3^{k+1} > h_k(G)$ ならば, G の或る k 分割 $\{G^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ が存在して

$$\frac{h_{k+1}(G)}{3^{k+1}} \leq \min_{i=1,2,\dots,k} h(G^i), \quad \max_{i=1,2,\dots,k} \frac{|\partial V^i|}{|V^i|} \leq 3^k h_k(G)$$

を満たす.

この定理は, $h_{k+1}(G)$ と $h_k(G)$ の間に大きなギャップがあると, グラフ G は比較的結びつきの強い k 個のグラフをそれぞれ比較的少ない辺で繋げたものであり, このとき G は (1) を弱めた評価を持つことを示している.

ラプラシアン固有値はグラフの重要な量であるが, 等周定数と関係が深い. ラプラシアン Δ_G は, V 上の実数値関数からなる集合 \mathbb{R}^V 上の作用素で $f \in \mathbb{R}^V$ と $x \in V$ に対して,

$$\Delta_G f(x) := f(x) \deg(x) - \sum_{xy \in E} f(y)$$

と定義される. ここで $x \in V$ の次数 $\deg(x)$ は, x を端点に持つ辺の数である.

Δ_G の固有値を小さい順に $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_{|V|}(G)$ と表す. ラプラシアンの固有値もグラフの連結性の強さを表すことが知られており, $\lambda_2(G)$ は G の代数的連結度と呼ばれている. 実際, $\lambda_k(G) = 0$ かつ $\lambda_{k+1}(G) > 0$ であること, G の連結成分の個数が k であることは同値である. さらに, G のすべての連結成分からなる族を $\{G^i\}_{i=1}^k$ とすると

$$\lambda_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\dots,k} \lambda_2(G^i) \quad (2)$$

が成り立つ. G の任意の k 分割 $\{G^i\}_{i=1}^k$ に対して, 多分割等周定数と同様に

$$\min_{i=1,2,\dots,k} \lambda_2(G^i) \leq \lambda_{k+1}(G)$$

を示すことができる. Lee-Gharan-Trevisan [LGT12] により次が示されている: 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の連結グラフ G と任意の $k = 1, 2, \dots, |V|$ に対して

$$\frac{\lambda_k(G)}{2 \deg(G)} \leq h_k(G) \leq C k^2 \deg(G) \sqrt{\lambda_k(G)}. \quad (3)$$

ここで $\deg(G)$ は G の頂点の次数の最大値である. (ただし, 彼らは正規化されたラプラシアンの固有値と重み付き多分割等周定数に対してよりよい不等式を示しており, それには G の連結性は必要なく, 不等式中の $\deg(G)$ も必要ない.) この結果と定理 1 を用いると, $\lambda_{k+1}(G)$ と $\lambda_k(G)$ に大きなギャップがあると, G は (代数的連結度の意味で) 比較的結びつきの強い k 個のグラフをそれぞれ比較的少ない辺で繋げたものであり, このとき G は (2) を弱めた評価を持つことが分かる.

2 多分割エクスパンダー列

エクスパンダー列は計算理論, 群論, 幾何, トポロジーなどの分野で重要なグラフの列である (cf. [HLW06]). エクスパンダー列とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で次の 3 つを満たすものである: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$; (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$; (iii) $\inf_{n \in \mathbb{N}} h(G_n) > 0$. 次のより一般の有限グラフの列 (多分割エクスパンダー列) $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えるのは自然である: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$; (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$; (iii)' 或る $k \geq 1$ に対して $\inf_{n \in \mathbb{N}} h_{k+1}(G_n) > 0$. 各グラフが連結な多分割エクスパンダー列の例は, エクスパンダー列を k 個用意して各 n 番目のグラフ同士を互いにすべて 1 本の辺で結ぶことで簡単に構成できる. 多分割エクスパンダー列は以下を満たす:

系 2 ([Tan]). $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ を多分割エクスパンダー列とする. このとき, その部分列 $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$ と各 G_m の誘導部分グラフで $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ がエクスパンダー列となるものが存在する. さらに, もし G_n ($n = 1, 2, \dots$) がすべて連結ならば, 或る $k \in \mathbb{N}$ と, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$, 各 G_m の k 分割 $\{H_m^i\}_{i=1}^k$ が存在し, すべての $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $\{H_m^i\}_{m=1}^{\infty}$ はエクスパンダー列である.

多分割等周定数はラプラシアン固有値による上下からの評価があるため, この系は船野-塩谷 [FS13] による Riemann 多様体に対する以下の結果の類似と見做すことができる: $k + 1$ 番目の固有値が無限大に発散する重み付き閉 Riemannian 多様体の列は, k 個の Lévy 族の和である.

3 粗埋め込み可能性

距離空間の列 $\{(X_n, d_{X_n})\}_{n=1}^{\infty}$ が距離空間 (Y, d_Y) に粗埋め込み可能とは, $[0, +\infty)$ 上の 2 つの或る非減少関数 ρ_1, ρ_2 と写像の列 $\{f_n : X_n \rightarrow Y\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して以下を満たすことである:

(i) 任意の $x, y \in X_n$ と n に対して

$$\rho_1(d_{X_n}(x, y)) \leq d_{Y_n}(f_n(x), f_n(y)) \leq \rho_2(d_{X_n}(x, y))$$

(ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = +\infty$.

特に距離空間 X に対して, すべての n で $X_n = X$ とした列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が距離空間 Y に粗埋め込み可能であるとき, X は Y に粗埋め込み可能という.

連結グラフ G の頂点集合 V 上の距離 d_G を各 2 頂点を結ぶ道の辺の数の最小値で定義することができるため, 連結グラフは距離空間と見做すことができる. Yu により有限次数の無限グラフ G が Hilbert 空間に粗埋め込み可能なら

ば, G に対する粗 Baum-Connes 予想 (Atiyah-Singer の指数定理の K 理論類似) が正しいことを示した ([Yu00]). しかし, Gromov によりエクスペンダー列は, Hilbert 空間に粗埋め込み可能でないことが知られている ([Gro03]). つまり, エクスペンダー列を粗埋め込みできる有限次数無限グラフは, Yu の結果を用いた粗 Baum-Connes 予想の解決の障害となっている. 多分割エクスペンダー列に対し Hilbert 空間に粗埋め込み可能かどうか考察するため以下を示した.

補題 3 ([Tan]). 次数が一様に抑えられた有限グラフの列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 各 G_n の或る誘導部分グラフ H_n からなる列 $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ がエクスペンダー列ならば, $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ は Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない.

(グラフが距離空間として粗埋め込みできることと, 誘導部分グラフであることは異なることに注意.) よって次が示せた:

系 4. 多分割エクスペンダー列 (とそれらを粗埋め込みできる有限次数無限グラフ) も Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない.

一般にこの逆は成り立たない. 例えば, エクスペンダー列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ を 1 つ取ってきて, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\{G_n\}_{n=1}^k$ の各グラフの組 G_i, G_{i+1} を 1 つの辺で繋げたもの ($i = 1, 2, \dots, k-1$) を k 番目のグラフとするグラフ列は, Hilbert 空間に粗埋め込み可能でないが, 任意の k 分割等周定数は 0 に収束する.

参考文献

- [FS13] Kei Funano and Takashi Shioya, *Concentration, Ricci Curvature, and Eigenvalues of Laplacian*, *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), no. 3, 888–936.
- [Gro03] M. Gromov, *Random walk in random groups*, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 1, 73–146.
- [HLW06] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43** (2006), no. 4, 439–561 (electronic).
- [LGT12] James R. Lee, Shayan Oveis Gharan, and Luca Trevisan, *Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities*, ACM, New York, 2012.
- [Tan] Mamoru Tanaka, *Multi-way expansion constants and partitions of a graph*, preprint, arXiv:1112.3434.
- [Yu00] Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, *Invent. Math.* **139** (2000), no. 1, 201–240.