Multi-way expansion constants and expander graphs

田中 守

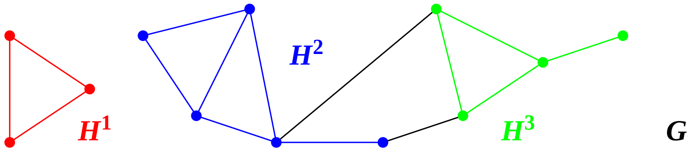
東北大学 原子分子材料科学高等研究機構

第 60 回幾何学シンポジウム
東京工業大学大岡山キャンパス

2013 年 8 月 24 日 (土)

概略

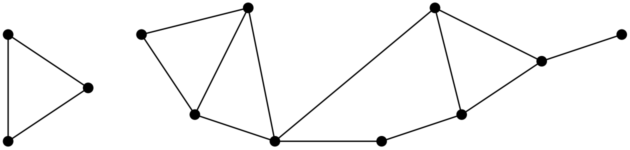
- k-分割等周定数 $h_k(G)$ は有限グラフ G の連結性の強さを表す量の１つであるが, ここでは $h_k(G)$, $h_{k+1}(G)$ と k-分割 $\{H^i\}_{i=1}^k$ の間の関係



- 有限グラフ G のラプラシアンの第 k 固有値 $\lambda_k(G)$ と $h_k(G)$ の関係
- 多分割等周定数を用いて一般化したエクスパンダー列の Hilbert 空間への粗埋め込み不可能性

グラフ

グラフ $G = (V, E)$ は頂点集合 V と辺集合 $E \subset \{vw : v, w \in V\}$ の組.



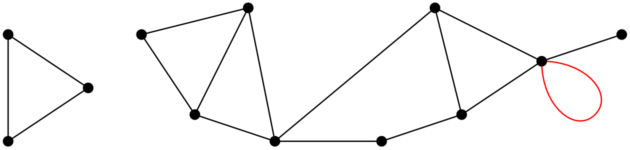
G

グラフが有限であるとは, $|V| < \infty$ かつ $|E| < \infty$ であること. 以下, グラフは無向 ($vw = wv$) かつループを持たない ($vv \notin E$) とする.

$\deg(v) := |\{w \in V : vw \in E\}|$ for $v \in V$.
$\deg(G) := \max_{v \in V} \deg(v)$.

グラフ

グラフ $G = (V, E)$ は頂点集合 V と辺集合 $E \subset \{vw : v, w \in V\}$ の組.

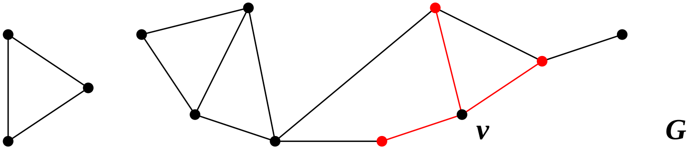


グラフが有限であるとは, $|V| < \infty$ かつ $|E| < \infty$ であること. 以下, グラフは無向辺 $(vw = wv)$ かつループを持たない $(vv \notin E)$ とする.

$\deg(v) := |\{w \in V : vw \in E\}|$ for $v \in V$.
$\deg(G) := \max_{v \in V} \deg(v)$.

グラフ

グラフ $G = (V, E)$ は頂点集合 V と辺集合 $E \subset \{vw : v, w \in V\}$ の組.



グラフが有限であるとは, $|V| < \infty$ かつ $|E| < \infty$ であること. 以下, グラフは無向辺 $(vw = wv)$ かつループを持たない $(vv \notin E)$ とする.

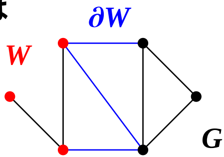
$\deg(v) := |\{w \in V : vw \in E\}|$ for $v \in V$.
$\deg(G) := \max_{v \in V} \deg(v)$.

等周定数 $h(G)$

定義 (等周定数)

有限グラフ $G = (V, E)(|V| \geq 2)$ の等周定数とは

$$h(G) = \min_{\emptyset \neq W \subset V} \left\{ \frac{|\partial W|}{|W|} : |W| \leq \frac{|V|}{2} \right\}.$$



ここで $\partial W := \{vw : v \in W,\ w \in V - W\}$.

G が連結であることと $h(G) > 0$ は同値である.

$h(G) \geq \epsilon$ である G は ϵ-エクスパンダーグラフと呼ばれる.

- 完全グラフ $K^{2n}(n \in \mathbb{N})$ に対し $h(K^{2n}) = n$.
- $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ に対し $G_{n_1,n_2} := (V_{K^{n_1}} \cup V_{K^{n_2}}, E_{K^{n_1}} \cup E_{K^{n_2}} \cup \{vw\})$ で $v \in V_{K^{n_1}}, w \in V_{K^{n_2}}$ ならば, $h(G_{n_1,n_2}) = 1/\min\{n_1, n_2\}$.

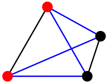


Figure: K^4

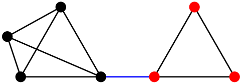


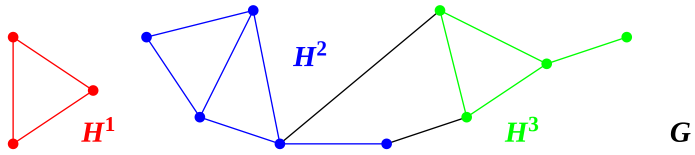
Figure: $G_{4,3}$

グラフの分割

グラフ $H = (V_H, E_H)$ が $G = (V, E)$ の誘導部分グラフであるとは, $V_H \subset V$ かつ $E_H = \{xy \in E : x, y \in V_H\}$ であること.
誘導部分グラフは, その頂点集合により一意に決まる.

定義 (グラフの分割)

グラフ $G = (V, E)$ の k-分割とは, G の誘導部分グラフの族 $\{H^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ で $V = \sqcup_{i=1}^k V^i$ (直和) かつすべての i で $V^i \neq \emptyset$ であるもの.



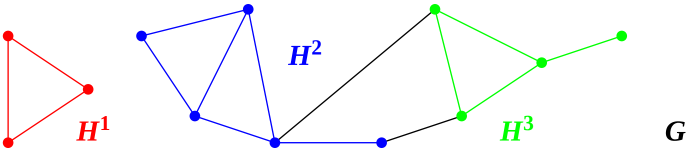
多分割等周定数 $h_k(G)$

定義 (Lee-Gharan-Trevisan)

$k \in \mathbb{N}$ に対し, 有限グラフ $G = (V, E)$ $(|V| \geq k)$ の k-分割等周定数とは,

$$h_k(G) := \min \left\{ \max_{i=1,2,\ldots,k} \frac{|\partial V^i|}{|V^i|} : \{H^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k \text{ は } k\text{-分割} \right\}.$$

特に, $h_2(G) = h(G)$.



多分割等周定数 $h_k(G)$

定義 (Lee-Gharan-Trevisan)

$k \in \mathbb{N}$ に対し, 有限グラフ $G = (V, E)$ ($|V| \geq k$) の k-分割等周定数とは,

$$h_k(G) := \min \left\{ \max_{i=1,2,\ldots,k} \frac{|\partial V^i|}{|V^i|} : \{H^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^{k} \text{ は } k\text{-分割} \right\}.$$

特に, $h_2(G) = h(G)$.

例

- $n, k \in \mathbb{N}$ に対し, $h_k(K^{kn}) = (k-1)n$.
- $n \in \mathbb{N}$ に対し, $h_3(G_{2n,2n}) = n$, $h_2(G_{2n,2n}) = 1/2n$.

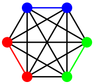


Figure: K^6

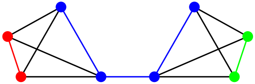


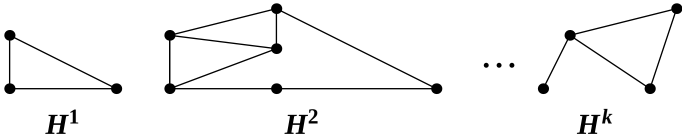
Figure: $G_{4,4}$

$h_k(G)$ のいくつかの性質

- $0 = h_1(G) \leq h_2(G) \leq h_3(G) \leq \cdots \leq h_n(G) \leq \deg(G)$.

$h_k(G)$ のいくつかの性質

- $0 = h_1(G) \leq h_2(G) \leq h_3(G) \leq \cdots \leq h_n(G) \leq \deg(G)$.
- 「G の連結成分が k 個であること」と「$h_k(G) = 0$ かつ $h_{k+1}(G) > 0$」は同値.



さらにこのとき, G の各連結成分 $H^i = (V^i, E^i)$ が $|V^i| \geq 2$ ならば,

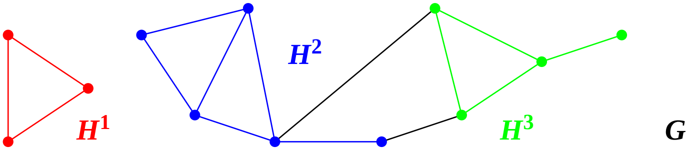
$$h_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\ldots,k} h(H^i).$$

分割中の誘導部分グラフの連結性の強さ

補題

有限グラフ G の任意の k-分割 $\{H^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ (各 i で $|V^i| \geq 2$) に対して

$$h_{k+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\ldots,k} h(H^i).$$

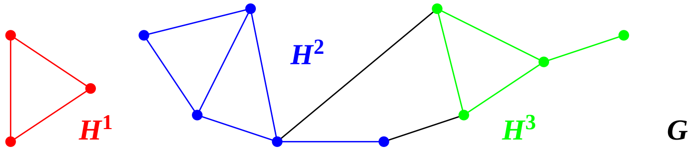


分割中の誘導部分グラフの連結性の強さ

Theorem

有限グラフ G がある $k \in \mathbb{N}$ に対して $h_{k+1}(G)/3^{k+1} > h_k(G)$ を満たすならば, G の k-分割 $\{H^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ が存在して次が成り立つ:

$$\frac{h_{k+1}(G)}{3^{k+1}} \leq \min_{i=1,2,\dots,k} h(H^i), \quad \max_{i=1,2,\dots,k} \frac{|\partial V_i|}{|V_i|} \leq 3^k h_k(G).$$

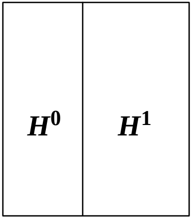


定理中の分割の構成

(1) G の誘導部分グラフ H^0 で

$$\frac{|\partial V_{H^0}|}{|V_{H^0}|} = h(G) \quad \text{かつ} \quad |V_{H^0}| \le \frac{|V|}{2}$$

であるものを取り, $H^1 := G - H^0$ とする. ここで $G - H^0$ は頂点集合が $V - V_{H^0}$ の G の誘導部分グラフを表す.



G

これは, つまり G の等周定数

$$h(G) = \min_{\emptyset \neq W \subset V} \left\{ \frac{|\partial W|}{|W|} : |W| \le \frac{|V|}{2} \right\}$$

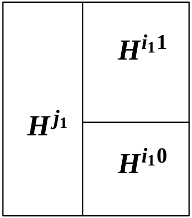
を実現する誘導部分グラフを H^0 とし, 残りの頂点から構成される誘導部分グラフを H^1 とした.

定理中の分割の構成

(2) $h(H^{i_1}) \leq h(H^{j_1})$ $(i_1, j_1 \in \{0,1\},\ i_1 \neq j_1)$ と仮定する. これに対し H^{i_1} の誘導部分グラフ $H^{i_1 0}$ で

$$\frac{|\partial_{H^{i_1}} V_{H^{i_1 0}}|}{|V_{H^{i_1 0}}|} = h(H^{i_1}) \quad \text{かつ} \quad |V_{H^{i_1 0}}| \leq \frac{|V_{H^{i_1}}|}{2}$$

であるものを取り, $H^{i_1 1} := H^{i_1} - H^{i_1 0}$ とする. ただし, グラフ G_1 の誘導部分グラフ G_2 に対して, $\partial_{G_1} V_{G_2} := \{xy \in E_{G_1} | x \in V_{G_2}, y \in V_{G_1 - G_2}\}$ と定義する.



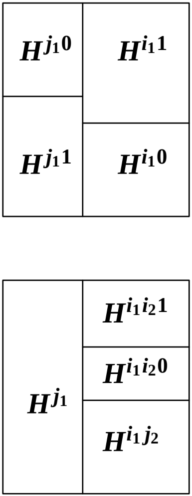
G

これは, つまり等周定数が小さい誘導部分グラフ H^{i_1} の等周定数 $h(H^{i_1})$ を実現する誘導部分グラフを $H^{i_1 0}$ とし, 残りの頂点から構成される H^{i_1} の誘導部分グラフを $H^{i_1 1}$ とした.

定理中の分割の構成

(3-1) もし $h(H^{j_1}) \le \min\{h(H^{i_1 0}), h(H^{i_1 1})\}$ ならば, H^{j_1} の等周定数 $h(H^{j_1})$ を実現する誘導部分グラフを $H^{j_1 0}$ とし, 残りの頂点から構成される H^{j_1} の誘導部分グラフを $H^{j_1 1}$ とする.

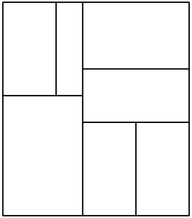
(3-2) もし $\min\{h(H^{i_1 0}), h(H^{i_1 1})\} < h(H^{j})$ ならば, $h(H^{i_1 i_2}) \le h(H^{i_1 j_2})$（$i_2, j_2 \in \{0, 1\}$, $i_2 \ne j_2$）と仮定する.
これに対し $H^{i_1 i_2}$ の等周定数を実現する誘導部分グラフを $H^{i_1 i_2 0}$ とし, 残りの頂点から構成される $H^{i_1 i_2}$ の誘導部分グラフを $H^{j_1 i_2 1}$ とする.



G

Construction of the partition in Theorem 1

帰納的に，このように分割してできた誘導部分グラフの集合 $\{H^{a_1a_2\cdots a_m}\}$ の中で，等周定数が最も小さい誘導部分グラフ $H^{a_1a_2\cdots a_\ell}$ を，$H^{a_1a_2\cdots a_\ell}$ の等周定数を実現する誘導部分グラフ $H^{a_1a_2\cdots a_\ell 0}$ と残りの頂点から構成される $H^{a_1a_2\cdots a_\ell}$ の誘導部分グラフ $H^{a_1a_2\cdots a_\ell 1}$ に分割する．
これを分割してできた誘導部分グラフが k 個になるまで続ける．そうすると G の k-分割が構成される．これが定理の分割である．



エクスパンダー列

エクスパンダー列は有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で次を見たすものである:

(i) $\lim_{n\to\infty} |V_n| = \infty$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$;

(iii) $\inf_{n\in\mathbb{N}} h(G_n) > 0$.

エクスパンダー列

エクスパンダー列は有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で次を見たすものである:

(i) $\lim_{n\to\infty} |V_n| = \infty$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$;

(iii) $\inf_{n\in\mathbb{N}} h(G_n) > 0$.

系 (いくつかのエクスパンダー列への"分割"の存在)

$\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を有限グラフの列で次を満たすものとする:

(i) $\lim_{n\to\infty} |V_n| = \infty$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$;

(iii)' $\inf_{n\in\mathbb{N}} h_{k'+1}(G_n) > 0$ *for some* $k' \in \mathbb{N}$.

このとき $k \in \mathbb{N}$ ($k \leq k'$) と $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$, 各 m に対する G_m の k-分割 $\left\{H_m^i\right\}_{i=1}^{k}$ が存在して, すべての $i = 1, 2, \ldots, k$ で $\left\{H_m^i\right\}_{m=1}^{\infty}$ はエクスパンダー列である.

Eigenvalues $\lambda_k(G)$ of the Laplacian of a graph

Let $G = (V, E)$ be a graph, and $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
The *Laplacian* on G is an $n \times n$ symmetric integer matrix
$\Delta_G := D(G) - A(G)$, where

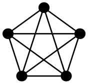
$$D(G)_{ij} := \begin{cases} \deg(v_i) & (i = j) \\ 0 & \text{(otherwise)}, \end{cases} \qquad A(G)_{ij} := \begin{cases} 1 & (v_i v_j \in E) \\ 0 & \text{(otherwise)}. \end{cases}$$

Let $\lambda_1(G) \le \lambda_2(G) \le \cdots \le \lambda_n(G)$ be the eigenvalues of Δ_G.

Example

- Complete graphs

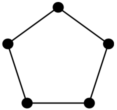
  $\lambda_1(K^n) = 0$, $\lambda_k(K^n) = n$ for $k = 2, 3, \ldots, n$;



K^5

- Cycles

  $C^n := (\{1, 2, \ldots, n\}, \{vw; |v - w| = 1 \mod n\})$
  $\{\lambda_k(C^n)\}_{k=1}^n = \{2 - 2\cos(2\pi(j-1)/n)\}_{j=1}^n$.



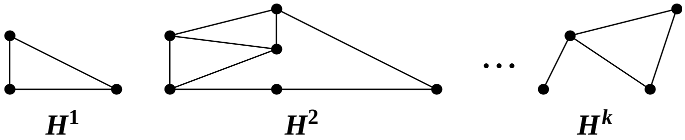
C^5

Some properties of $\lambda_k(G)$

- $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_n(G) \leq 2\deg(G)$.

Some properties of $\lambda_k(G)$

- $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_n(G) \leq 2\deg(G)$.
- $\lambda_k(G) = 0$ and $\lambda_{k+1}(G) > 0$ if and only if the number of the connected components of G is k.

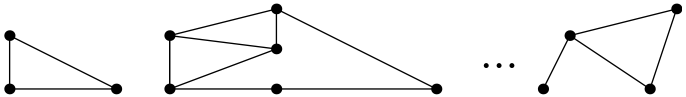


In this situation if each connected components H^i of G satisfy $|V^i| \geq 2$, then

$$\lambda_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\ldots,k} \lambda_2(H^i).$$

Some properties of $\lambda_k(G)$

- $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_n(G) \leq 2\deg(G)$.
- $\lambda_k(G) = 0$ and $\lambda_{k+1}(G) > 0$ if and only if the number of the connected components of G is k.



H^1 H^2 H^k

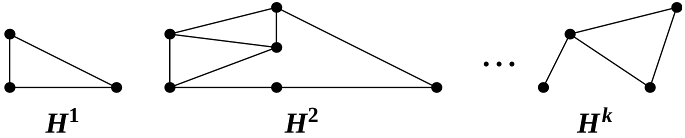
In this situation if each connected components H^i of G satisfy $|V^i| \geq 2$, then

$$\lambda_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\dots,k} \lambda_2(H^i).$$

As above $\lambda_k(G)$ and $h_k(G)$ have similar properties.

Some properties of $\lambda_k(G)$

- $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_n(G) \leq 2\deg(G)$.
- $\lambda_k(G) = 0$ and $\lambda_{k+1}(G) > 0$ if and only if the number of the connected components of G is k.



In this situation if each connected components H^i of G satisfy $|V^i| \geq 2$, then

$$\lambda_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\ldots,k} \lambda_2(H^i).$$

As above $\lambda_k(G)$ and $h_k(G)$ have similar properties.

Lemma

For any k-partition $\{H^i\}_{i=1}^k$ of G with $|V^i| \geq 2$, we have

$$\lambda_{k+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\ldots,k} \lambda_2(H^i).$$

Relation between $\lambda_k(G)$ and $h_k(G)$

Theorem (Lee-Gharan-Trevisan '12)

There is $C > 0$ such that for any connected graph $G = (V, E)$ with $|V| \geq k$

$$\frac{\lambda_k(G)}{2\deg(G)} \leq h_k(G) \leq Ck^2 \deg(G) \sqrt{\lambda_k(G)}.$$

In reality, they prove similar inequalities, whose coefficients don't depends on $\deg(G)$, for the weighted multi-way expansion constant and eigenvalues of the normalized Laplacian on a graph G.

Relation between $\lambda_k(G)$ and $h_k(G)$

Corollary

Let $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *be a sequence of finite graphs such that*

(i) $\lim_{n\to\infty} |V_n| = \infty$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$;

(iii)' $\inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_{k'+1}(G_n) > 0$ *for some* $k' \in \mathbb{N}$.

Then there are $k \in \mathbb{N}$ *with* $k \le k'$, *subsequence* $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$ *of* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, *and* k*-partitions* $\left\{H_m^i\right\}_{i=1}^{k}$ *of* G_m *for each* m *such that* $\left\{H_m^i\right\}_{m=1}^{\infty}$ *are sequences of expanders for each* $i = 1, 2, \ldots, k$.

This is a graph analog of the following result:

Theorem (Funano-Shioya)

A sequence of closed weighted Riemannian manifolds whose $(k+1)$*-st eigenvalues diverges to* ∞ *for a fixed natural number* k *is a union of* k *Lévy families.*

Coarse non-embeddability

Definition (Gromov)

A sequence of metric spaces $\{(X_n, d_{X_n})\}_{n=1}^{\infty}$ is said to be *coarsely embeddable* into a metric space (Y, d_Y) if there exist two non-decreasing functions $\rho_1, \rho_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ and maps $f_n : X_n \to Y$ $(n = 1, 2, \dots)$ such that

(1) $\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = +\infty$;

(2) $\rho_1(d_{X_n}(x, y)) \le d_Y(f_n(x), f_n(y)) \le \rho_2(d_{X_n}(x, y))$ for all $x, y \in X_n$ and n.

We can endow a graph G with the path metric $d_G(x, y)$ between vertices x and y which is the minimum number of edges connecting x and y.

Theorem (Gromov)

A sequence of expander graphs is not coarsely embeddable into any Hilbert space.

Coarse non-embeddability

命題

Let $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *be a sequence of graphs with* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$. *If there are induced subgraphs* H_n *of* G_n *for all* n *such that* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *is a sequence of expanders, then* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *is not coarsely embeddable into any Hilbert space.*

Hence we have the following:

Corollary

Let $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *be a sequence of finite graphs such that*

(i) $\lim_{n\to\infty} |V_n| = \infty$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$;

(iii)' $\inf_{n\in\mathbb{N}} h_{k'+1}(G_n) > 0$ *for some* $k' \in \mathbb{N}$.

Then $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *is not coarsely embeddable into any Hilbert space.*

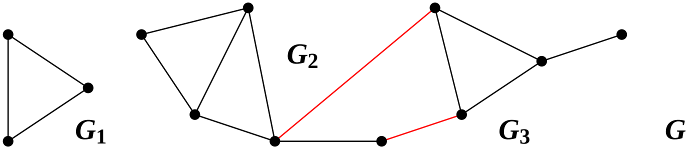
Thank you for your attention

Comment on the relation between $h_k(G)$ and $\lambda_k(G)$

Let $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ be the eigenvectors with $||x_l|| = 1$ associated to $\lambda_1(G), \lambda_2(G), \ldots, \lambda_k(G)$ respectively. Then we can write

$$\lambda_l(G) = \langle \Delta_G x_l, x_l \rangle = \sum_{v_i v_j \in E} |(x_l)_i - (x_l)_j|^2.$$

Very roughly speaking, the k-partition $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^k$ which attain $h_k(G)$ is obtained by dividing G along edges $\{v_i v_j\}$ which $|(x_l)_i - (x_l)_j|$ are larger than the others for each $l = 1, 2, \ldots, k$.



Random graph

”The second eigenvalue of random graph (associated to d) is bounded below by a positive constant.”

Random graph

"The second eigenvalue of random graph (associated to d) is bounded below by a positive constant."

For $n, d \in \mathbb{N}$, let $P_{n,d}$ be the uniform distribution on $\Pi_{n,d} := \left\{ \{\pi_j\}_{j=1}^d : \pi_j \text{ are permutations on } \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$.

For $\pi = \{\pi_j\}_{j=1}^d \in \Pi_{n,d}$, we define the graph

$$G(\pi) := \left(\{1, 2, \ldots, n\}, \{i\pi_j(i) : 1 \le i \le n, 1 \le j \le d, i \ne \pi_j(i)\} \right).$$

Then $\deg(G(\pi)) \le 2d$.

Theorem (cf. Friedman '03)

For $d \ge 2$ there is a positive constant C such that

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,d} \left(\left\{ \pi \in \Pi_{n,d} : \lambda_2 (G(\pi)) > C \right\} \right) = 1.$$

(*Moreover, he gave the best possible constant of C and the order for $2d$-regular graphs which allows loops and multiple edges.*)