

Property (T_{L^Φ}) for Orlicz spaces L^Φ

田中 守

東北大学 AIMR

日本数学会 2015 年度年会 幾何学分科会

2015 年 3 月 24 日

背景と目的

既約ユニタリー表現に関する性質である Kazhdan の性質 (T) を持つ位相群の多くが "剛性" を持つことが知られており、盛んに研究されている。

Kazhdan の性質 (T) は、Banach 空間への線形等長表現に対し拡張されており、特に Banach 空間が $L^p([0, 1])$ 空間 ($1 < p < \infty$) の場合に、Kazhdan の性質 (T) と同値であることが知られている。

本講演では、このような同値性を L^p 空間より広いクラスである Orlicz 空間で考察し、得られた結果を紹介する。

この結果は、横田氏 (京都大) に「群の或る性質に関して L^p 空間で成り立っていることは Orlicz 空間に拡張できるのではないか？」との質問に対し、得られた一つの結果である。

線形等長表現

Γ : 有限生成無限群 (例えば $\mathbb{Z}^n$, F_n , $SL(n, \mathbb{Z})$ など)

S : Γ の有限生成元集合 (例えば $\Gamma = \mathbb{Z}$ なら $S = \{-1, 1\}$ など)

B : Banach 空間

$O(B)$: B の線形等長変換群

準同型 $\rho : \Gamma \rightarrow O(B)$ を、 Γ の B への線形等長表現と呼ぶ。

このとき ρ の固定ベクトル部分空間は

$$B^{\rho(\Gamma)} := \{v \in B \mid \rho(\gamma)v = v, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

であるが、 $B/B^{\rho(\Gamma)}$ 上に (固定ベクトルを持たない) 商表現

$$\rho' : \Gamma \rightarrow O(B/B^{\rho(\Gamma)})$$

が自然に与えられる。

性質 (T_B)

定義 (Bader-Furman-Gelander-Monod '07)

Γ が性質 (T_B) を持つとは、 Γ の B への任意の線形等長表現 $\rho : \Gamma \rightarrow O(B)$ から作られる商表現 $\rho' : \Gamma \rightarrow O(B/B^{\rho(\Gamma)})$ に対し、或る $\kappa > 0$ が存在し、 $\|v\| = 1$ である任意の $v \in B/B^{\rho(\Gamma)}$ に対し

$$\max_{\gamma \in S} \|\rho'(\gamma)v - v\| \geq \kappa$$

を満たすことである。

性質 (T_B) を持つかどうかは有限生成元集合 S の取り方に依存しない。

B が無限次元 Hilbert 空間のとき、性質 (T_B) は Kazhdan の性質 (T) と同値である。(例えば $\mathbb{Z}^n$, F_n , $SL(2, \mathbb{Z})$ などには性質 (T) を持たないが、 $SL(n, \mathbb{Z})$ ($n \geq 3$) は性質 (T) を持つ。)

Kazhdan の性質 (T) と性質 (T_{L^p}) の関係

定理 (Bader-Furman-Gelander-Monod '07)

- ▶ Γ が或る $1 < p < \infty$ に対し性質 ($T_{L^p([0,1])}$) を持つならば、Kazhdan の性質 (T) を持つ。
- ▶ Γ が Kazhdan の性質 (T) を持つならば、任意の $1 \leq p < \infty$ と任意の σ -有限測度空間 (Ω, μ) に対し性質 ($T_{L^p(\Omega, \mu)}$) を持つ。

特に $1 < p < \infty$ に対し、

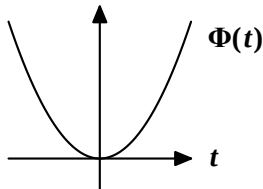
Γ が Kazhdan の性質 (T) を持つ $\Leftrightarrow \Gamma$ が性質 ($T_{L^p([0,1])}$) を持つ

目標: この同値性を Orlicz 空間で考察したい。

Young 関数, N-関数

Young 関数 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ とは、以下を満たす偶関数:

- ▶ 凸 ;
- ▶ $\Phi(0) = 0$;
- ▶ $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = +\infty$.



例えば、 $\Phi_p(t) = |t|^p$ ($p \geq 1$)、

$\Phi_\infty(t) = 0$ ($t \in [-1, 1]$); $\Phi_\infty(t) = +\infty$ (それ以外)

などは Young 関数である。

N-関数とは、Young 関数 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ で以下を満たすもの:

- ▶ $t = 0$ 以外で $0 < \Phi(t) < \infty$
- ▶ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$

例えば、 Φ_p ($1 < p < \infty$) は N-関数で、 Φ_1 と Φ_∞ は N-関数でない。

Orlicz 空間

Young 関数 Φ と σ -有限測度空間 (Ω, μ) に対し、関数空間

$$L^\Phi(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{可測}, \exists a > 0 \text{ s.t. } \int_{\Omega} \Phi(af) d\mu < \infty \right\} / \sim$$

を Orlicz 空間という。但し $f \sim g$ は $f = g$ a.e. である。

$f \in L^\Phi(\Omega, \mu)$ に対し、

$$\|f\|_{(\Phi)} = \inf \left\{ b > 0 \mid \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{f}{b}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

を f の Luxemburg ノルムといい、このとき $(L^\Phi(\Omega, \mu), \|\cdot\|_{(\Phi)})$ は Banach 空間である。以下、Orlicz 空間のノルムとして、Luxemburg ノルムを考える。

例えば、 $L^\Phi(\Omega, \mu) = L^p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) である。

結果 $(T_{L^{\Phi}([0,1])}) \Rightarrow (T)$

定理 1

Γ を有限生成群とし、 Φ を $0 < \Phi(t) < \infty$ ($t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) を満たす Young 関数とする。このとき、性質 $(T_{L^{\Phi}([0,1])})$ を持つならば、性質 (T) を持つ。

例えば、 Φ_p ($1 \leq p < \infty$) は定理の仮定を満たすが、 Φ_{∞} は満たさない。

証明は、非原始的な標準確率空間への測度保存エルゴード作用を用いた Kazhdan の性質 (T) の特徴づけを使い、背理法で行う。

結果 $(T) \Rightarrow (T_{L^\Phi([0,1])})$

Young 関数 Φ に対し、 $\Phi^*(s) := \sup\{|s|t - \Phi(t) : t \geq 0\}$ とする。

例えば、 $\Phi(t) = \frac{|t|^p}{p}$ ならば $\Phi^*(s) = \frac{|s|^q}{q}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) である。

定理 2

Γ を有限生成群とし、 Φ, Φ^* は狭義凸な N -関数で、任意の $0 < a < 1$ に対し、或る $0 < \delta_a < 1$ と或る $t_0 \geq 0$ が存在し、 $t \geq t_0$ に対し、

$$\Phi\left(\frac{t+at}{2}\right) \leq (1-\delta_a)\frac{\Phi(t)+\Phi(at)}{2}, \quad \Phi^*\left(\frac{s+as}{2}\right) \leq (1-\delta_a)\frac{\Phi^*(s)+\Phi^*(as)}{2}$$

を満たすとする。

このとき、 Γ が Kazhdan の性質 (T) を持つならば、性質 $(T_{L^\Phi([0,1])})$ を持つ。

例えば、 Φ_p ($1 < p < \infty$) は定理の仮定を満たすが、 Φ_1, Φ_∞ は満たさない。

まとめ

$(T_{L^\Phi([0,1])}) \Rightarrow (T)$ は、

$$0 < \Phi(t) < \infty \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

を満たすとき成り立つ。

$(T) \Rightarrow (T_{L^\Phi(\Omega)})$ は、 Φ, Φ^* が N-関数のとき

$L^\Phi([0, 1])$ が一様凸で一様に滑らか

なとき成り立つ。

(定理 2 の仮定は、 Φ, Φ^* が N-関数のとき $L^\Phi([0, 1])$ が一様凸で一様に滑らかであることと同値。)