

グラフの分割と固有値の関係について

田中 守

東北大学 大学院理学研究科

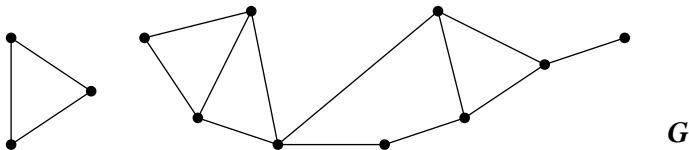
日本数学会 2012 年度年会 幾何学分会

2012 年 3 月 28 日

東京理科大学

有限グラフ

有限グラフ $G = (V, E)$ とは,
有限集合 V と集合 $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ の組.
 V の元を G の頂点といい, E の元を G の辺という.
簡単のため辺 $\{x, y\}$ を xy と書く.



有限グラフ H に対して, V_H と書けば H の頂点集合, E_H と書けば H の辺集合を表すとする.

ラプラシアン固有値

頂点 $x \in V$ に対して $\deg(x) := |\{y \in V : xy \in E\}|$, つまり頂点 x と辺で結ばれている頂点の数とする.

定義 (グラフ上のラプラシアン)

$G = (V, E)$ 上のラプラシアンとは,
 $|V| \times |V|$ -実対称行列 $\Delta_G := D(G) - A(G)$, ただし

$$D(G)_{ij} := \begin{cases} \deg(x_i) & i = j \\ 0 & \text{その他,} \end{cases} \quad A(G)_{ij} := \begin{cases} 1 & x_i x_j \in E \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

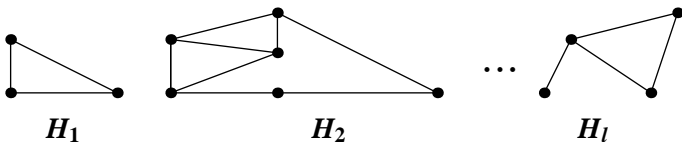
ここで $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{|V|}\}$.

- $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_{|V|}(G)$: Δ_G の固有値

いつでも $\lambda_1(G) = 0$.

Δ_G の固有値に関するグラフの性質

- $\lambda_l(G) = 0 < \lambda_{l+1}(G) \iff G$ の連結成分の個数が l .
特に, $\lambda_{l+1}(G) = \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(H_i)$,
ただし $\{H_i\}_{i=1}^l$ は G のすべての連結部分グラフからなる族.



疑問

有限グラフ G が「 $\lambda_l(G) \ll \lambda_{l+1}(G)$ であること」と、「 l 個の有限グラフを少ない辺でつないだ有限グラフになっていること」には関係があるだろうか？

特に, $\lambda_{l+1}(G)$ と $\min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(H_i)$ の関係は？

分割

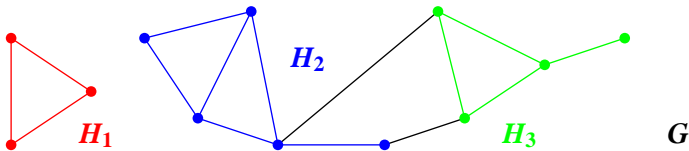
定義 (誘導部分グラフ)

グラフ $H = (V_H, E_H)$ が, $G = (V, E)$ の誘導部分グラフであるとは, $V_H \subset V$ かつ $E_H = \{xy \in E : x, y \in V_H\}$ であること.

誘導部分グラフは, その頂点集合 V_H により一意に決まる.

定義 (分割)

G の分割とは, G の誘導部分グラフの族 $\{H_i = (V_{H_i}, E_{H_i})\}_{i=1}^l$ で $V = \sqcup_{i=1}^l V_{H_i}$ (直和) を満たすもの.



補題

G の分割 $\{H_i\}_{i=1}^l$ に対して,

$$\lambda_{l+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(H_i).$$

補題

G の分割 $\{H_i\}_{i=1}^l$ に対して,

$$\lambda_{l+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(H_i).$$

$\deg(G) := \max_{x \in V} \deg(x)$ とする.

定理

或る $l \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_{l+1}(G) > 2(l+1)3^{l+1} \sqrt{2 \deg(G) \lambda_l(G)}$,

つまり $\lambda_{l+1}(G) \gg \lambda_l(G)$

$\Rightarrow G$ の分割 $\{H_i\}_{i=1}^l$ が存在して

$$\lambda_{l+1}(G) \leq 2(l+1)3^{l+1} \sqrt{2 \deg(G) \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(H_i)},$$

つまり $\exists C = C(G, l) > 0$ s.t. $\lambda_{l+1}(G) \leq C \sqrt{\min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(H_i)}$.

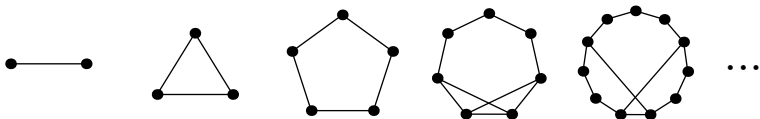
応用: エクスパンダーの族

定義 (エクスパンダーの族)

エクスパンダーの族とは, 有限グラフの無限列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で以下を満たすものである:

- 1 $n \rightarrow \infty$ のとき $|V_n| \rightarrow \infty$;
- 2 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \leq k$;
- 3 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_2(G_n) \geq C$.

エクスパンダーの族は, コンピュータネットワークの理論や, 距離空間の埋め込みなどに応用のある対象である.



系

$\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を有限グラフの列で以下を満たすものとする:

- 1 $n \rightarrow \infty$ のとき $|V_n| \rightarrow \infty$;
- 2 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \leq k$;
- 3 自然数 $l \in \mathbb{N}$ と定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_{l+1}(G_n) \geq C$.

このとき, 或る $l' \leq l$ と, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$, 各 G_m の分割 $\{H_m^i\}_{i=1}^{l'}$ が存在して, 各 $i = 1, 2, \dots, l'$ に対して無限列 $\{H_m^i\}_{m=1}^{\infty}$ はエクスペンダーの族である.

注意

この結果は, 船野-塩谷による次の結果を, グラフの場合に示したものである: 第 $k+1$ 固有値が無限大に発散する閉重み付きリーマン多様体の列は, k 個のレビ族の和である.

ご清聴ありがとうございました.