有限グラフの第 l 固有値

田中 守

東北大学 大学院理学研究科

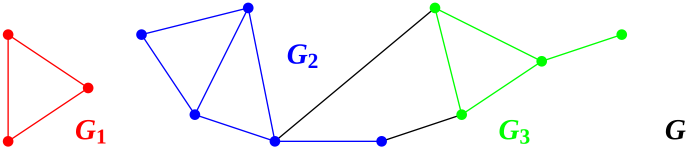
第 8 回数学総合若手研究集会
～ 数学を中心とした広範な知識の交流 ～

2012 年 3 月 1 日

北海道大学 学術交流会館

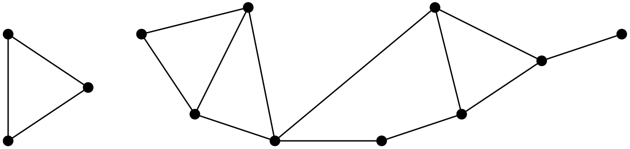
$$\lambda_l(G) \longleftrightarrow h_l(G) \longleftrightarrow \min_{i=1,2,\ldots,l} \lambda_2(G_i)$$

$\lambda_l(G)$: 有限グラフ G の離散ラプラシアンの第 l 固有値
$h_l(G)$: G の等周定数 (連結性の強さを測る量)
$\{G_i\}_{i=1}^{l}$: G の分割



有限グラフ

有限グラフ $G = (V, E)$ とは,
有限集合 V と $E \subset \{xy : x, y \in V, x \neq y\}$ の組. ただし $xy = yx$ とする.
V の元を G の頂点といい, E の元を G の辺という.

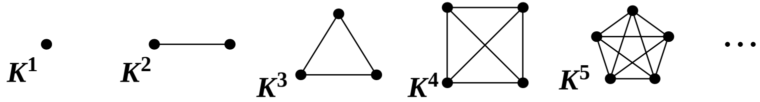


G

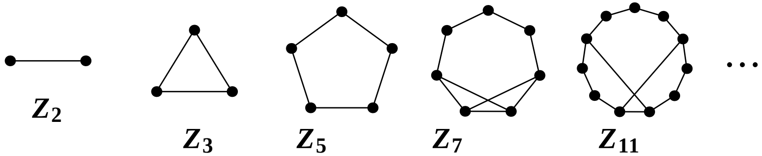
グラフ H に対して, V_H と書けば H の頂点集合, E_H と書けば H の辺集合を表すとする.

有限グラフの例

(i) 完全グラフ K^n とは $V_{K^n} := \{1, 2, \ldots, n\}$ かつ $E_{K^n} := \{ij : i \neq j\}$ の有限グラフである.



(ii) 素数 p に対して有限グラフ Z_p を, $V_{Z_p} := \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ かつ $E_{Z_p} := \{ij : j = i + 1\} \cup \{ij : j = i^{-1}, i \neq 0, i \neq i^{-1}\}$ で定義する.

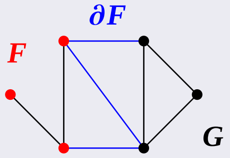


等周定数

定義 (等周定数)

G の等周定数とは,

$$h(G) := \min_{F \subset V} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \le |F| \le \frac{|V|}{2} \right\}$$



である. ただし, $\partial F := \{xy : x \in F,\ y \in V - F\}$.

- $h(G) > 0$
  $\Longleftrightarrow$ G が連結, つまり任意の 2 頂点をいくつかの辺をつないで結ぶことができる.

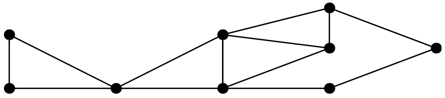


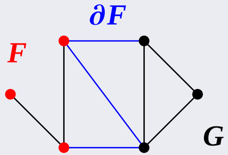
Figure: 連結なグラフの例

等周定数

定義 (等周定数)

G の等周定数とは,

$$h(G) := \min_{F \subset V} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \le |F| \le \frac{|V|}{2} \right\}$$



である. ただし, $\partial F := \{xy : x \in F,\ y \in V - F\}$.

- $h(G) > 0$
  $\Longleftrightarrow$ G が連結, つまり任意の 2 頂点をいくつかの辺をつないで結ぶことができる.

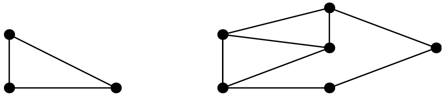


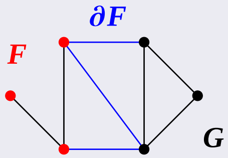
Figure: 連結でないグラフの例

等周定数

定義 (等周定数)

G の等周定数とは,

$$h(G) := \min_{F \subset V} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \leq |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$



である. ただし, $\partial F := \{xy : x \in F,\ y \in V - F\}$.

等周定数は,

$$h(G) = \min_{\emptyset \neq F \subset V} \left\{ \max \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|}, \frac{|\partial (V-F)|}{|V-F|} \right\} : F \neq \emptyset, V \right\}$$

と書くこともでき, 2 つに分けた頂点集合の間の結びつきの強さを表していると言える.

例

$n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$h(K^{2n}) = n.$$

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ に対して, $G_{n_1,n_2} := (V_{K^{n_1}} \cup V_{K^{n_2}}, E_{K^{n_1}} \cup E_{K^{n_2}} \cup \{xy\})$ とする. ただし $x \in V_{K^{n_1}}$ かつ $y \in V_{K^{n_2}}$. このとき

$$h(G_{n_1,n_2}) = \frac{1}{\min\{n_1, n_2\}}.$$

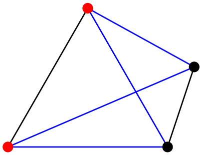


Figure: K^4

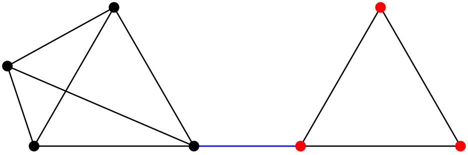


Figure: $G_{4,3}$

離散ラプラシアンの固有値

$x \in V$ に対して $\deg(x) := |\{y \in V : xy \in E\}|$, つまり x と辺で結ばれている頂点 y の数とする.

定義 (グラフ上の離散ラプラシアン)

G 上の離散ラプラシアンとは, $|V| \times |V|$-実対称行列 $\Delta_G := D(G) - A(G)$, ただし

$$D(G)_{ij} := \begin{cases} \deg(x_i) & i = j \\ 0 & \text{その他}, \end{cases} \quad A(G)_{ij} := \begin{cases} 1 & x_i x_j \in E \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

ここで $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|V|}\}$.

$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_{|V|}(G)$: Δ_G の固有値

いつでも $\lambda_1(G) = 0$.

離散ラプラシアンに関する補足

離散ラプラシアン Δ_G は, $\mathbb{R}^V = \{f : V \to \mathbb{R}\}$ 上の線形作用素とみなすこともできる. つまり, $f \in \mathbb{R}^V$ と $x \in V$ に対して,

$$\Delta_G f(x) = f(x)\deg(x) - \sum_{xy \in E} f(y).$$

そのため, $\Delta_G f = 0$ を満たす $f \in \mathbb{R}^V$ は, 各点での値がその周りの点の平均となる (調和関数の平均値の性質).
また, 差分 $d : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^E$ を, $f \in \mathbb{R}^V$, $xy \in E$ に対して,

$$df(xy) := |f(x) - f(y)|$$

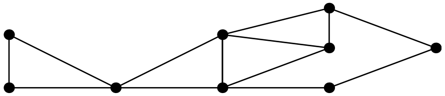
と定義すると,

$$\sum_{x \in V} \Delta_G f(x) f(x) = \sum_{xy \in E} df(xy) df(xy).$$

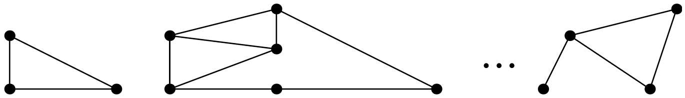
そのため, 微分を用いたラプラシアン Δ の離散の場合の類似物として $-\Delta_G$ が定義されている.

Δ_G の固有値に関するグラフの性質

- $\lambda_2(G) > 0 \iff G$ が連結.



- $\lambda_l(G) = 0$ かつ $\lambda_{l+1}(G) > 0 \iff G$ の連結成分の個数が l.



等周定数と離散ラプラシアンの第 2 固有値

"$h(G) > 0 \iff \lambda_2(G) > 0 \iff G$ が連結"であった. では,

疑問

$h(G)$ と $\lambda_2(G)$ には, 数値的にどのような関係があるだろうか?

等周定数と離散ラプラシアンの第 2 固有値

"$h(G) > 0 \iff \lambda_2(G) > 0 \iff G$ が連結"であった. では,

疑問

$h(G)$ と $\lambda_2(G)$ には, 数値的にどのような関係があるだろうか?

$\deg(G) := \max_{x \in V} \deg(x)$.

定理 (Alon-Milman '85 + Dodziuk '84)

$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2\deg(G)\lambda_2(G)}. \tag{1}$$

この定理より, $\lambda_2(G)$ も 2 つに分けた頂点集合の間の結びつきの強さを表していると言える.

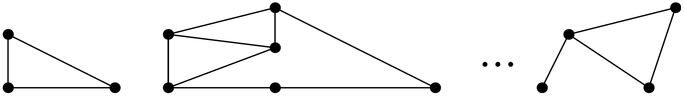
定理 (Alon-Milman ’85 + Dodziuk ’84)

$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2\deg(G)\lambda_2(G)}. \quad (1)$$

疑問

$l > 2$ に対しても, 不等式 (1) のように $\lambda_l(G)$ と ”グラフの連結性” を関係付けることができるであろうか ?

そこで ”$\lambda_l(G) = 0$ かつ $\lambda_{l+1}(G) > 0 \iff G$ の連結成分の個数が l”



に注目し, 新たな ”グラフの連結性” を定義する.

分割

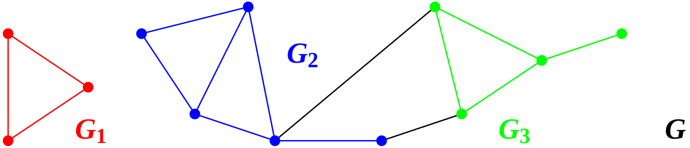
定義 (導入された部分グラフ)

グラフ H が, 導入された G の部分グラフであるとは, $V_H \subset V$ かつ $E_H = \{xy \in E : x, y \in V_H\}$ であること.

導入された G の部分グラフは, その頂点集合から決まる.

定義 (分割)

G の分割とは, 導入された G の部分グラフの族 $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^{l}$ で $V = \sqcup_{i=1}^{l} V_i$(直和) を満たすもの.



高次等周定数

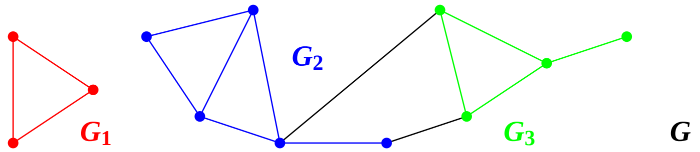
定義 (高次等周定数)

G の高次等周定数を, 各 $l \in \mathbb{N}$ に対して,

$$h_l(G) := \min\left\{ \max_{i=1,2,\ldots,l} \frac{|\partial V_i|}{|V_i|} : \{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^{l} \text{ は } G \text{ の分割} \right\}$$

で定義する.

特に, $h_2(G) = h(G) = \min_{F \subset V} \{|\partial F|/|F| : 1 \leq |F| \leq |V|/2\}$.
また, $h_l(G) = 0$ かつ $h_{l+1}(G) > 0 \iff G$ の連結成分の個数が l.



例

$$h_l(K^{ln}) = n, \qquad h_3(G_{2n,2n}) = n, \qquad h_2(G_{2n,2n}) = \frac{1}{2n},$$

ここで $G_{2n,2n}$ は 2 つの完全グラフ K^{2n} と K^{2n} を 1 つの辺で結んだものであった.

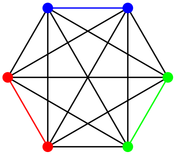


Figure: K^6

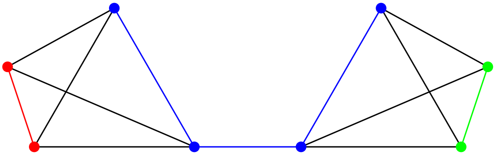


Figure: $G_{4,4}$

例

より一般に, $G^l_{m_1,m_2,\dots,m_l}$ を, $V_{G^l_{m_1,m_2,\dots,m_l}} = \cup_{i=1}^l V_{K^{m_1}}$ かつ $E_{G^l_{m_1,m_2,\dots,m_l}} = \cup_{i=1}^l E_{K^{m_1}} \cup \cup_{i=1}^{l-1}\{x_i y_{i+1}\}$ の有限グラフとする. ここで $x_i \in K^{m_i}$, $y_{i+1} \in K^{m_{i+1}}$. このとき $l > 2$ に対して,

$$h_l\left(G^l_{2n,2n,\dots,2n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad h_{l+1}\left(G^l_{2n,2n,\dots,2n}\right) = n = h(K^{2n}).$$

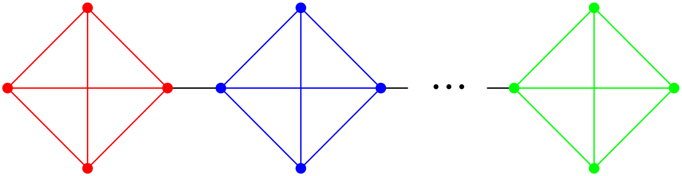


Figure: $G^l_{4,4,\dots,4}$

例

より一般に, $G^l_{m_1,m_2,\dots,m_l}$ を, $V_{G^l_{m_1,m_2,\dots,m_l}} = \cup_{i=1}^l V_{K^{m_1}}$ かつ $E_{G^l_{m_1,m_2,\dots,m_l}} = \cup_{i=1}^l E_{K^{m_1}} \cup \cup_{i=1}^{l-1}\{x_i y_{i+1}\}$ の有限グラフとする. ここで $x_i \in K^{m_i}$, $y_{i+1} \in K^{m_{i+1}}$. このとき $l > 2$ に対して,

$$h_l\left(G^l_{2n,2n,\dots,2n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad h_{l+1}\left(G^l_{2n,2n,\dots,2n}\right) = n = h(K^{2n}).$$

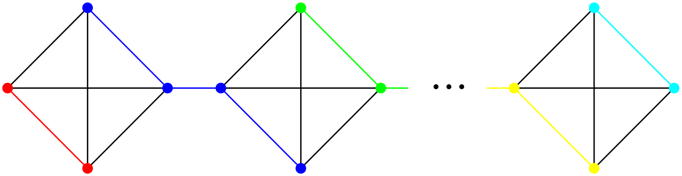


Figure: $G^l_{4,4,\dots,4}$

定理 1

$l > 2$ に対して

$$\frac{\lambda_l(G)}{2l} \leq h_l(G) \leq 3^l \sqrt{2\deg(G)\lambda_l(G)} \tag{2}$$

これは不等式 (1)

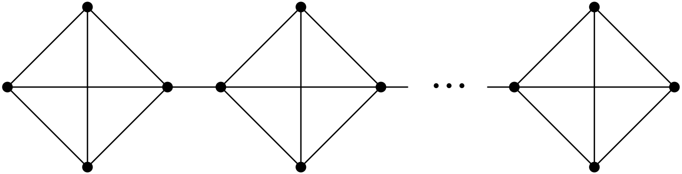
$$\frac{\lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2\deg(G)\lambda_2(G)}$$

のように $h_l(G)$ が $\lambda_l(G)$ で評価できることを表している.
また, この定理 1 は

- $\lambda_l(G) = 0$ かつ $\lambda_{l+1}(G) > 0 \iff h_l(G) = 0$ かつ $h_{l+1}(G) > 0$

という事実の数値的な拡張である.

一方で, $h_{l+1}\left(G^{l}_{2n,2n,\dots,2n}\right) = n = h(K^{2n})$ のように, 高次等周定数と分割に含まれる導入された部分グラフの等周定数とが関係しているように見える.



定理 2

G の任意の分割 $\{G_i\}_{i=1}^{l}$ に対して

$$\min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(G_i) \le \lambda_{l+1}(G). \tag{3}$$

定理 3

或る $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lambda_{l+1}(G) > 2(l+1)3^{l+1}\sqrt{2\deg(G)\lambda_l(G)}, \tag{4}$$

を満たすならば, G の分割 $\{G_i\}_{i=1}^{l}$ が存在して

$$\lambda_{l+1}(G) \leq 2(l+1)3^{l+1}\min_{i=1,2,\ldots,l} h(G_i). \tag{5}$$

定理 3 は, $\lambda_{l+1}(G) \gg \lambda_l(G)$ のとき, $\lambda_{l+1}(G)$ は或る分割の各導入された部分グラフの結びつきの強さを表していると言える.

(1) $\lambda_2(G)/2 \leq h(G)$ と (3) $\min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_2(G_i) \leq \lambda_{l+1}(G)$ を使うと，次が得られる．

例

もし $l = 2$ かつ $n > 2 \cdot 3^4$ ならば，$G_{2n,2n}$ は仮定 (4) を満たす．

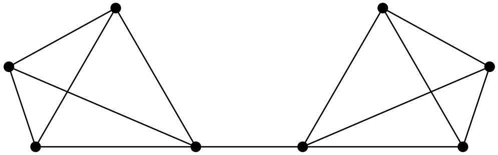


Figure: $G_{2n,2n}$

この例のように仮定 (4) はとても強いように見える．

問題

この仮定 (4) を弱めることは可能であるか?

エクスパンダーの族

エクスパンダーの族は, コンピュータネットワークの理論や, 距離空間の埋め込みなどに応用のある対象である.

定義 (エクスパンダーの族)

エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で以下を満たすものである:

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \le k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h(G_n) \ge C$.

不等式 (1) $\lambda_2(G)/2 \le h(G) \le \sqrt{2\deg(G)\lambda_2(G)}$ から, 条件 3 は, 或る定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_2(G_n) \ge C$ であることと同値である.

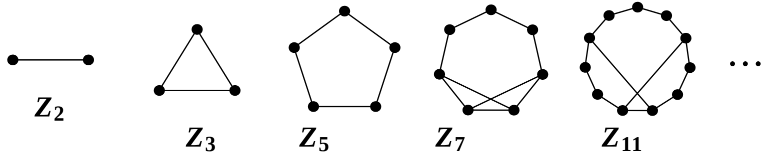
定義 (エクスパンダーの族)

エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で以下を満たすものである:

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \le k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h(G_n) \ge C$.

例

有限連結グラフの族 $\{Z_{p_n}\}_{p_n:\mathrm{prime}}$ はエクスパンダーの族である.

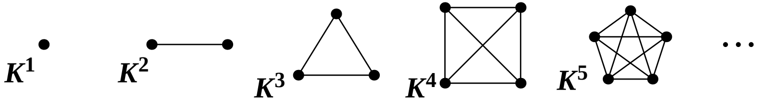


定義 (エクスパンダーの族)

エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で以下を満たすものである:

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \leq k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h(G_n) \geq C$.

$\{K^n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 条件 1 と条件 3 を満たすが, 条件 2 は満たさない.

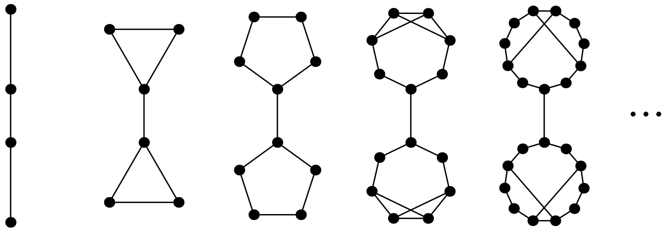


定義 (エクスパンダーの族)

エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で以下を満たすものである:

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \le k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h(G_n) \ge C$.

下のグラフの列は, 条件 1 と条件 2 を満たすが, 条件 3 は満たさない.



定義 (エクスパンダーの族)

エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で以下を満たすものである:

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \leq k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h(G_n) \geq C$.

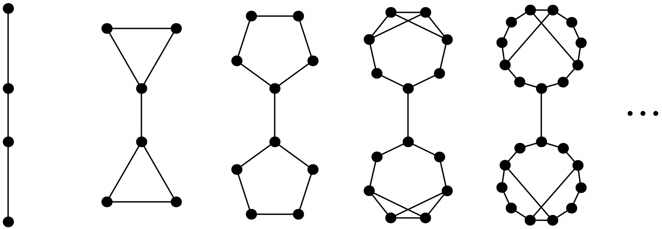
例 (Margulis '88)

有限生成群 Γ の有限商群には, Γ の生成元集合から導かれる有限商群の生成元集合が決まる. また, 有限生成群 (特に有限群) は生成元集合を決めることで, そのケーリーグラフと呼ばれるグラフを定義することができる. 性質 (T) を持つ有限生成群の有限商群の列はエクスパンダーの族である.

観察

$\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を有限グラフの列とし, 各 n での G_n の分割 $\{H_n^i\}_{i=1}^{l}$ を与える. 各 $i = 1, 2, \ldots, l$ に対して, $\{H_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ がエクスパンダーの族になっていると仮定する.
この時, 定理 2 を使うと, 以下の 3 つが成り立つことがわかる.

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \le k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h_{l+1}(G_n) \ge C$.



系 1

$\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を有限グラフの列で以下を満たすものとする:

1. $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$;
2. 定数 $k > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\deg(G_n) \le k$;
3. 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $h_{l+1}(G_n) \ge C$.

このとき, 或る $l' \le l$ と, 数列 $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, 任意の m に対して G_{n_m} の分割 $\{H_m^i\}_{i=1}^{l'}$ が存在して, 各 $i = 1, 2, \ldots, l'$ に対して, 列 $\{H_{n_m}^i\}_{m=1}^{\infty}$ はエクスパンダーの族である.

注意

この結果は, 船野-塩谷による次の結果を, グラフの場合に示したものである: 第 l 固有値が無限大に発散する閉重み付きリーマン多様体の列は, k 個のレビ族の和である.

一様埋め込み

連結グラフ G の頂点集合には, 2 頂点を結ぶ辺の最小数で距離 d_G を与えることができる.

定義 (一様埋め込み)

連結グラフの列 $\{(G_n, d_{G_n})\}_{n=1}^{\infty}$ が, 距離空間 (Y, d_Y) に一様埋め込みできるとは, 関数 $\rho_1, \rho_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ と各 n で写像 $f_n : V_n \to Y$ が存在し, 以下が成り立つこと:

1. 任意の n と任意の $x, y \in V_n$ に対し
$$\rho_1(d_{G_n}(x, y)) \leq d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \rho_2(d_{G_n}(x, y)),$$
2. $r \to \infty$ のとき $\rho_1(r) \to \infty$.

特に, (G_n, d_{G_n}) がすべて同じグラフ (G, d_G) のとき, (G, d_G) が (Y, d_Y) に一様埋め込みできると言う.

一様埋め込み不可能性

一様埋め込みとは, 距離空間の等長埋め込みや擬等長埋め込みよりも非常に弱い埋め込みである. しかし, 次が成り立つ.

定理 (Gromov '91)

エキスパンダーの族は, ヒルベルト空間に一様埋め込みできない.

この結果は, ヒルベルト空間に一様埋め込みできないケーリーグラフを持つ有限生成無限群の存在を示すために用いられている. それは, K-理論の Baum-Connes 予想などと関連している. 上の Gromov の定理の拡張として次が示せる.

系 2

系 1 の有限グラフの列は, ヒルベルト空間に一様埋め込みできない.

ご清聴ありがとうございました。

[1] N. Alon and V. D. Milman, λ_1, *isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators*, J. Combin. Theory Ser. B **38** (1985), no. 1, 73–88, DOI 10.1016/0095-8956(85)90092-9. MR **782626 (87b:**05092)

[2] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak, and Alain Valette, *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 55, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. MR **1989434 (2004f:**11001)

[3] Jozef Dodziuk, *Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), no. 2, 787–794, DOI 10.2307/1999107. MR **743744 (85m:**58185)

[4] Kei Funano and Takashi Shioya, *Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of laplacian*, preprint.

[5] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295. MR **1253544 (95m:**20041)

[6] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **43** (2006), no. 4, 439–561 (electronic), DOI 10.1090/S0273-0979-06-01126-8. MR **2247919 (2007h:**68055)

[7] Mamoru Tanaka, *Higher eigenvalues and partitions of a graph*, preprint, arXiv:1112.3434.

[8] *Explicit group theoretic constructions of combinatrial schemes and their applications for the construction of expanders*, J. of Problems of Information Transmission **24** (1988), 39–46.

[9] Manor Mendel and Assaf Naor, *Towards a calculus for non-linear spectral gaps*, SODA’10 arXiv:0910.2041.

[10] **浦川 肇**, **ラプラス作用素とネットワーク**, **裳華房**, 1996.

[11] Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 201–240, DOI 10.1007/s002229900032. MR **1728880 (2000j:**19005)