# グラフの分割と固有値の関係について

田中 守 (東北大学大学院理学研究科)

本講演では, グラフは向きを持たず, ループ辺と多重辺を持たないとする. 以下 $G=(V,E)$ を連結有限グラフとする. $G$ の部分グラフ $H=(V_H,E_H)$ とは, $V_H \subset V$ であり, 各 $x,y \in V_H$ に対して $xy \in E_H$ と $xy \in E$ が同値であるグラフとする. $G$ の分割とは, 部分グラフの族 $\{G_i=(V_i,E_i)\}_i$ で, $V$ が各 $V_i$ の直和であるものとする. $G$ 上のラプラシアン $\Delta_G$ は関数 $f:V\to\mathbb{R}$ に対して

$$\Delta_G f(x) := f(x)\deg(x) - \sum_{y\in V, xy\in E} f(y)$$

と各 $x\in V$ で定義される. ここで, $\deg(x) := |\{xy\in E : y\in V\}|$ である. このラプラシアンの固有値を, その大きさの順に $\lambda_0(G)\le\lambda_1(G)\le\cdots\le\lambda_{|V|-1}(G)$ と表す. 特に $\lambda_0(G)=0$ であり, $\lambda_1(G)>0$ である. 本講演では, $G$ の分割 $\{G_i\}_{i=1}^l$ に対する $\lambda_1(G_i)$ と $\lambda_l(G)$ との関係について述べる.

**補題 1.** $G$ の分割 $\{G_i\}_{i=1}^l$ に対して

$$\lambda_l(G) \ge \min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_1(G_i).$$

上の補題とは逆に, 或る条件の下では, $G$ の或る分割 $\{G_i\}_{i=1}^l$ に対して $\min_i \lambda_1(G_i)$ が $\lambda_l(G)$ を用いて下から評価できる. 以下, $\deg(G) := \max_{x\in V} deg(x)$ と表す.

**定理 2.** 或る $k,\ l\ge 2$ に対して $\deg(G)\le k$ かつ

$$\lambda_{l-1}(G) \le \frac{\lambda_l(G)^2}{2k(l+3)^{2(l+3)}}$$

を満たすとする. このとき, $G$ の分割 $\{G_i=(V_i,E_i)\}_{i=1}^l$ が存在して

$$\min_{i=1,2,\dots,l} |V_i| \ge \frac{1}{\sqrt{2k\lambda_{l-1}(G)}},$$

$$\min_{i=1,2,\dots,l} \lambda_1(G_i) \ge \frac{\lambda_l(G)^2}{2k(l+3)^{2(l+3)}}$$

を満たす.

この定理を使うと, 第 $l$ 固有値に関する或る条件を満たす有限グラフの列が, エクスパンダーの族を用いて表せることを示すことができる. まず, $G$ の等周定数 $h(G)$ とは

$$h(G) := \min_{F \subset V} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \leq |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

で定義されるものである. ここで, $\partial F$ は $F$ と $V - F$ を繋ぐ辺の集合である. エクスパンダーの族とは, 有限グラフの列 $\{G_n := (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ であり, (1) $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$ ; (2) 或る $k > 0$ が $\sup_{n \in \mathbb{N}} \deg(G_n) \leq k$ を満たす ; (3) 或る定数 $C > 0$ が $\inf_{n \in \mathbb{N}} h(G_n) \geq C$ を満たすものである. このようなグラフの列は, 距離空間の埋め込みの理論やコンピュータネットワークの分野などで研究されている.

等周定数 $h(G)$ が最小正固有値 $\lambda_1(G)$ を用いて上下から評価されることはよく知られている事実である:

**定理 3** (cf.[1]). $deg(G) \leq k$ を満たす任意の $k$ に対して

$$\frac{\lambda_1(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2k\lambda_1(G)}.$$

この定理から次が観察できる: $l$ 個のエクスパンダーの族 $\{G_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ に対し, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ を連結有限グラフの列で, 各 $n$ で $\{G_n^i\}_{i=1}^{l}$ が $G_n$ の分割になっているものとする. すると補題 1 から, 定数 $C > 0$ が存在して $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_l(G_n) \geq C$ を満たすことがわかる. 一方で定理 2 を使うと次が得られる.

**系 4.** *$\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を連結有限グラフの列で, (1) $n \to \infty$ のとき $|V_n| \to \infty$ ; (2) 或る $k > 0$ が $\sup_{n \in \mathbb{N}} \deg(G_n) \leq k$ を満たす ; (3) 自然数 $l \in \mathbb{N}$ と定数 $C > 0$ が存在して $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_l(G_n) \geq C$ を満たすとする. このとき, 自然数 $l' \leq l$ と増大数列 $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ が存在し, さらに各 $m$ に対して $G_{n_m}$ の分割 $\{H_m^i\}_{i=1}^{l'}$ が存在して, 各 $i = 1, 2, \ldots, l'$ に対して列 $\{H_{n_m}^i\}_{m=1}^{\infty}$ はエクスパンダーの族となる.*

# 参考文献

[1] G. Davidoff, P. Sarnak and A. Valette, Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs, London Mathematical Society Student Texts, 55, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.