有限生成群上のp-ラプラシアン

田中　守　(東北大学大学院 理学研究科)*

1. 背景

有限生成群ΓがKazhdanの性質(T)を持つとは, Γの任意の既約ユニタリー表現(π, H)がほとんど固定されるベクトルを持たない, つまり或る正定数Cが存在し, 任意の$v \in H$が$\max_{\gamma \in K} \|\pi(\gamma)v - v\| \geq C\|v\|$を満たすことである. ここで, KはΓの有限生成元集合である.

また, 有限生成群Γが性質(FH)を持つとは, Γの任意のHilbert空間への任意のアフィン等長作用が固定点を持つことである.

これらの性質を持つ群の多くが "剛性" を持つことが知られており, 盛んに研究されている. 例えば, $SL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ はKazhdanの性質(T)を持つが, 可換自由群$\mathbb{Z}^n$や非可換自由群F_nなどは持たない. 実は, 有限生成群がKazhdanの性質(T)を持つことと, 性質(FH)を持つことは同値である (cf. [2]). しかし, これらの性質のBanach空間上の等長作用への拡張は, 一般に同値でないことが知られている ([3], cf. [1]).

本講演では, 実Lebesgue空間$\ell^p(\Gamma)$への左正則表現とそれを線形部分に持つアフィン等長作用に対し, Kazhdanの性質(T)と性質(FH)の類似を考え, それらを有限生成群上の或る関数空間上のp-ラプラス作用素を用いて表す.

2. p-ラプラシアン

Γを有限生成無限群とし, Kをその有限生成元集合とする. さらに, $1 < p < \infty$とし, $\gamma \in K$ならば$\gamma^{-1} \in K$であると仮定する. Lebesgue空間$\ell^p(\Gamma)$とは, 空間が$\{f : \Gamma \to \mathbb{R} | \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty\}$であり, ノルムが$\|f\|_{\ell^p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p)^{1/p}$で定義されるBanach空間である.

群Γ上の実数値関数からなる線形空間を$\mathcal{F}(\Gamma)$と表す. 群Γの$\mathcal{F}(\Gamma)$への左正則表現λ_Γは, $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$と$\gamma, \gamma' \in \Gamma$に対して$(\lambda_\Gamma(\gamma)f)(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$と定義される. この表現$\lambda_\Gamma$の$\ell^p(\Gamma)$への制限を$\lambda_{\Gamma,p}$と表す. 表現$\lambda_{\Gamma,p}$は, 既約な (つまり非自明な固定ベクトルを持たない) Γの$\ell^p(\Gamma)$への線形等長作用とみなせる.

関数$f \in \mathcal{F}(\Gamma)$に対して, $df(\gamma) := \lambda_\Gamma(\gamma)f - f$と定義する. これは, ΓのKに関するCayleyグラフ, つまりΓの元を頂点とし, Kの元で移りあう頂点を辺で結んだグラフ上での "fのγ^{-1}方向の微分" に相当する.

関数$f \in \mathcal{F}(\Gamma)$が$p$-Dirichlet有限であるとは, すべての$\gamma \in K$で$df(\gamma) \in \ell^p(\Gamma)$となることである. p-Dirichlet有限関数は一般に有界関数とは限らない. すべてのp-Dirichlet有限関数からなる空間を$D_p(\Gamma)$と表す. 空間$D_p(\Gamma)$は$\ell^p(\Gamma)$を線形部分空間として含む. 空間$D_p(\Gamma)$には, $\|f\|_{D_p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in K} \|df(\gamma)\|^p_{\ell^p(\Gamma)}/|K|)^{1/p}$でセミノルムを定める. (定数関数和しても変わらないのでノルムではない.)

キーワード：有限生成群, Kazhdanの性質(T), 性質(FH), p-Dirichlet有限関数, p-ラプラシアン
*e-mail: sa5m10@math.tohoku.ac.jp
web: http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa5m10/

関数 $f \in D_p(\Gamma)$ の p-ラプラシアン $\Delta_p f$ を

$$\Delta_p f(x) := \sum_{\gamma\in K} \frac{|df(\gamma)(x)|^{p-2}(df(\gamma)(x))}{|K|} \quad \left(= -f(x) + \sum_{\gamma\in K} \frac{f(\gamma^{-1}x)}{|K|},\ p=2\text{のとき} \right)$$

と定義する．但し, $p<2$ のとき, $df(\gamma)(x)=0$ ならば $|df(\gamma)(x)|^{p-2}=0$ とする．

3. 定理

定理 1. 以下は同値.

(i) 正定数 C が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\max_{\gamma\in K}\|\lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f - f\|_{\ell^p(\Gamma)} \geq C\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}$ を満たす (Kazhdan の性質 (T) の類似).

(ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C'\|f\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 但し, q は p の共役指数, つまり $q = p/(p-1)$ である．

ここで, $g \in \ell^q(\Gamma)$ と $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対し, $\langle g, h\rangle := \sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma)f(\gamma)$ とする．このとき, 正定数 C_1 が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\langle \Delta_p f, f\rangle \geq C_1\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}^p$ を満たすならば, 定理1 の (i)（よって (ii)）が成り立つ．一方で, $\|f\|_{D_p(\Gamma)} \geq \max_{\gamma\in K}\|\lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f - f\|_{\ell^p(\Gamma)}/|K|^{1/p}$ であるため, 定理1 の (i), (ii) のいずれかが成り立つならば, 正定数 C_2 が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C_2\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす．特に $p=2$ のとき, これらはいずれも Δ_2 のスペクトルが下から評価できることを表している．

写像 $c : \Gamma \to \ell^p(\Gamma)$ が $\lambda_{\Gamma,p}$-コサイクルであるとは, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して $c(\gamma_1\gamma_2) = \lambda_{\Gamma,p}(\gamma_1)c(\gamma_2) + c(\gamma_1)$ が成り立つことである．また, 作用 $\alpha : \Gamma \times \ell^p(\Gamma) \to \ell^p(\Gamma)$ が $\lambda_{\Gamma,p}$ を線形部分に持つアフィン等長作用であるとは, ある $\lambda_{\Gamma,p}$-コサイクル c により, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して $\alpha(\gamma, f) = \lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f + c(\gamma)$ と書けることである．このとき次が成り立つ.

定理 2. 以下は同値.

(i) 線形部分が $\lambda_{\Gamma,p}$ の, Γ の $\ell^p(\Gamma)$ への任意のアフィン等長作用が固定点を持つ (性質 (FH) の類似).

(ii) 正定数 C'' が存在し, 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C''\|f\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす．但し, q は p の共役指数である．

特に $p=2$ のとき, 定理2 の (ii) は, $D_2(\Gamma)$ の内積に関する Δ_2 のスペクトルの下からの評価を表していると考えられる.

参考文献

[1] U. Bader, A. Furman, T. Gelander, and N. Monod, *Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces*, Acta Math. **198** (2007), 57–105.

[2] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, Kazhdan's Property (T), New Mathematical Monographs 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[3] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on ℓ^p-spaces*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 1144–1151.