

狭義凸 Banach 空間へのアフィン等長作用の 固定点の存在について

田中 守 (Mamoru Tanaka) 東北大学 (Tohoku University)

序

有限生成群が性質 (FH) を持つとは、無限次元 Hilbert 空間への任意のアフィン等長作用が固定点を持つことである。有限生成群が性質 (FH) を持つことは、Kazhdan の性質 (T) (定義 1 参照) を持つことと同値であることが知られている。これらの性質は、多くの分野で研究対象とされている。

最近では、これらの性質が Banach 空間に一般化され、研究されている。たとえば、Kazhdan の性質 (T) を Banach 空間 B に拡張した性質を性質 (T_B) とい (定義 1 参照)、無限次元 L^p 空間 $L^p(1 \leq p < \infty)$ に対して、有限生成群が性質 (T_{L^p}) を持つことは互いに同値であることが示されている ([BFGM])。

一方、有限生成群が性質 (F_B) を持つとは、Banach 空間 B への任意のアフィン等長作用が固定点を持つことである。有限生成群が性質 (F_{L^p}) を持つことは、すべての $p \in [1, 2]$ で同値である ([CDH], ただし $p = 1$ のときは性質 (F_{L^p}) の定義が少し異なる)。しかし、性質 $(F_{L^2}) (= \text{性質 } (FH))$ を持つが、十分大きな $p > 2$ に対して性質 (F_{L^p}) を持たない有限生成群の存在が知られている。そのため、一般には性質 (T_B) と性質 (F_B) は異なる性質である。

本講演では、 B を狭義凸実 Banach 空間とし、性質 (T_B) 、性質 (F_B) に関連するある条件を有限生成群が満たすための同値条件を与える。そして、この結果を ℓ^p 空間 $(1 < p < \infty)$ に適用し、有限生成群上のラプラシアンの特値とこれらの条件との関係を与える。

1 狭義凸実 Banach 空間への等長作用

Γ を有限生成群とし、 K をその有限生成元集合とする。ただし、 $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する。 B を Banach 空間とし、 $\pi : \Gamma \times B \rightarrow B$ を Γ の B への線形等長作用とする。作用 π の固定ベクトルからなる閉部分空間を $B^{\pi(\Gamma)}$ と書き、 $B' := B/B^{\pi(\Gamma)}$ とする。このとき、 π から自然に線形等長作用 $\pi' : \Gamma \times B' \rightarrow B'$ が誘導される。

定義 1. 有限生成群 Γ が性質 (T_B) を持つとは、正定数 C が存在して、任意の線形等長作用 $\pi : \Gamma \times B \rightarrow B$ に対し、任意の $v' \in B'$ が $\max_{\gamma \in K} \|\pi'(\gamma, v') - v'\| \geq C\|v'\|$ を満たすことである。特に、 B が無限次元 Hilbert 空間のとき、Kazhdan の性質 (T) を持つという。

以下, B を狭義凸 Banach 空間, つまり任意の異なる単位ベクトル $u, v \in B$ が $\|u + v\| < 2$ を満たす Banach 空間とする. 例えば, L^p 空間 ($1 < p < \infty$) は狭義凸 Banach 空間である.

写像 $c : \Gamma \rightarrow B$ が π -コサイクルであるとは, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して $c(\gamma_1\gamma_2) = \pi(\gamma_1, c(\gamma_2)) + c(\gamma_1)$ が成り立つことである. また, Γ の B への等長作用 $\alpha : \Gamma \times B \rightarrow B$ がアフィンであるとは, Γ の B へのある線形等長作用 ρ とある ρ -コサイクル c により, 任意の $v \in B$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して $\alpha(\gamma, v) = \rho(\gamma, v) + c(\gamma)$ と書けることである. この ρ を α の線形部分, c をコサイクル部分と呼ぶ. 線形部分が π のアフィン等長作用からなる集合を $\mathcal{A}(\pi)$ と表す. 特に, $\pi \in \mathcal{A}(\pi)$ である.

α を Γ の B へのアフィン等長作用とし, $1 \leq r < \infty$ とする. ベクトル $v \in B$ に対して

$$F_{\alpha,r}(v) := \left(\sum_{\gamma \in K} \frac{\|\alpha(\gamma, v) - v\|^r}{|K|} \right)^{1/r}, \quad F_{\alpha,\infty}(v) := \max_{\gamma \in K} \|\alpha(\gamma, v) - v\|$$

と定義する. このとき v が α の固定点であることと, $F_{\alpha,r}(v) = 0$ は同値である. また,

$$|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) := \max \left\{ \limsup_{u \rightarrow v, u \in B} \frac{F_{\alpha,r}(v) - F_{\alpha,r}(u)}{\|v - u\|}, 0 \right\}$$

と定義する. 関数 $|\nabla_- F_{\alpha,r}|$ は, $F_{\alpha,r}$ が最も減る方向への勾配のノルムとみなせる.

定理 1. π を Γ の B への線形等長作用とし, $1 \leq r \leq \infty$ とする. 線形等長作用 π は非自明な固定ベクトルを持たないと仮定する. このとき以下は同値.

- (i) 正定数 C が存在し, 任意の $v \in B$ が $\max_{\gamma \in K} \|\pi(\gamma, v) - v\| \geq C\|v\|$ を満たす.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $v \in B \setminus \{0\}$ が $|\nabla_- F_{\pi,r}|(v) \geq C'$ を満たす.

定理 1 の (i) は, 性質 (T_B) の線形等長作用 π' に対する条件そのものである.

定理 2 ([Tan]). π を Γ の B への線形等長作用とし, $1 \leq r \leq \infty$ とする. 線形等長作用 π は非自明な固定ベクトルを持たないと仮定する. このとき以下は同値.

- (i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$ が固定点を持つ.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$ に対して, $F_{\alpha,r}(v) > 0$ である任意の $v \in B$ が $|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) \geq C'$ を満たす.

これらの定理を有限生成群 Γ 上の ℓ^p 空間と, その上の正則表現に適用すると, 定理 1 の (i), 定理 2 の (i) と Γ 上の”ラプラシアン”のスペクトルとの関係が見えてくる.

2 定理の ℓ^p 空間への適用

前の節と同様に, Γ を有限生成群とし, K をその有限生成元集合とする. さらに, $1 < p < \infty$ とし, $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する. Lebesgue 空間 $\ell^p(\Gamma)$ とは, 空間が $\{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty\}$ であり, ノルムが $\|f\|_{\ell^p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p)^{1/p}$ の Banach 空間である.

群 Γ 上の実数値関数からなる空間を $\mathcal{F}(\Gamma)$ と表す. 群 Γ の $\mathcal{F}(\Gamma)$ 上の左正則表現 λ_Γ を, $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ と $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して $\lambda_\Gamma(\gamma)f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ と定義する. この表現 λ_Γ の $\ell^p(\Gamma) (\subset \mathcal{F}(\Gamma))$ への制限を $\lambda_{\Gamma,p}$ と表す. 表現 $\lambda_{\Gamma,p}$ は, 非自明な固定ベクトルを持たない Γ の $\ell^p(\Gamma)$ への線形等長作用とみなせる.

関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ に対して, $df(\gamma) := \lambda_\Gamma(\gamma)f - f$ と定義する. 関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ が p -Dirichlet 有限であるとは, すべての $\gamma \in K$ で $df(\gamma) \in \ell^p(\Gamma)$ が成り立つことである. すべての p -Dirichlet 有限関数からなる空間を $D_p(\Gamma)$ と表す. 空間 $\ell^p(\Gamma)$ は $D_p(\Gamma)$ の線形部分空間である. 空間 $D_p(\Gamma)$ には, $\|f\|_{D_p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in K} \|df(\gamma)\|_{\ell^p(\Gamma)}^p / |K|)^{1/p}$ でセミノルムを定めることができる.

関数 $f \in D_p(\Gamma)$ の p -ラプラシアン $\Delta_p f$ を,

$$\Delta_p f(x) := \sum_{\gamma \in K} \frac{|df(\gamma)(x)|^{p-2} df(\gamma)(x)}{|K|}$$

と定義する. 但し, $p < 2$ のとき, $df(\gamma)(x) = 0$ ならば $|df(\gamma)(x)|^{p-2} = 0$ とする. 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ に対して, df は $\lambda_{\Gamma,p}$ -コサイクルである. 逆に, Puls [Pul06] による結果から, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ に対して, そのコサイクル部分が df_α となる $f_\alpha \in D_p(\Gamma)$ が, 定数除を除いて一意に存在することが分かる. 特に $f_{\lambda_{\Gamma,p}} \equiv 0$ とできる. これらの事実と計算から, $F_{\alpha,p}(f) > 0$ を満たす任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対して,

$$|\nabla_- F_{\alpha,p}|(f) = \frac{2\|\Delta_p(f - f_\alpha)\|_{\ell^q(\Gamma)}}{\|f - f_\alpha\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}}$$

が成り立つことが分かる. 但し, q は p の共役指数, つまり $q = p/(p-1)$ である. 定理 1 に, この結果を用いると, 次の系が導かれる.

系 1. 以下は同値.

- (i) 正定数 C が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\max_{\gamma \in K} \|\lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f - f\|_{\ell^p(\Gamma)} \geq C\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}$ を満たす.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C'\|f\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 但し, q は p の共役指数である.

ここで, $g \in \ell^q(\Gamma)$ と $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対し, $\langle g, h \rangle := \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma)f(\gamma)$ とする. このとき, 正定数 C が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\langle \Delta_p f, f \rangle \geq C\|f\|_{\ell^p(\Gamma)}^p$ を満たすな

らば, 系 1 の (i) が成り立つ. 一方,

$$\|f\|_{D_p(\Gamma)} = F_{(\lambda_{\Gamma,p}),p}(f) \geq \max_{\gamma \in K} \|\lambda_{\Gamma,p}(\gamma)f - f\|_{\ell^p(\Gamma)} / |K|^{1/p}$$

である. よって, この系の (i), (ii) のいずれかが成り立つならば, 正定数 C'' が存在し, 任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C'' \|f\|_{\ell^p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 特に $p = 2$ のとき, これらはいずれも Δ_2 のスペクトルが下から評価できることを表している. 一方, 定理 2 に対しては, 次が成り立つ.

系 2 ([Tan]). 以下は同値.

- (i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ が固定点を持つ.
- (ii) 正定数 C' が存在し, 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C' \|f\|_{D_p(\Gamma)}^{p-1}$ を満たす. 但し, q は p の共役指数である.

特に $p = 2$ のとき, この系の (ii) は, $D_2(\Gamma)$ の内積に関する Δ_2 のスペクトルの下からの評価を表している.

参考文献

- [BFGM] Bader, U., Furman, A., Gelander, T., Monod, N.: Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces. *Acta Math.* **198**, 57–105 (2007)
- [CDH] I. Chatterji, C. Druţu, and F. Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint*, to appear in *Adv. of Math.*.
- [Pul06] M.J. Puls, *The first L^p -cohomology of some finitely generated groups and p -harmonic functions*, *J. Funct. Anal.* **237** (2006), no. 2, 391–401.
- [Tan] M. Tanaka, *Existence of a fixed point of an isometric action on a global Busemann nonpositive curvature space*, preprint.
- [Yu05] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on ℓ^p -spaces*, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 1144–1151.