Existence of a fixed point of an affine isometric action on a strictly convex Banach space

RIMS 研究集会「調和写像論の深化と展望」

田中 守 (Mamoru Tanaka)　東北大学 (Tohoku University)

２０１０年 6月 4日

序

実数 $p \geq 1$ に対して, 離散群が性質 FL^p を持つとは, 任意の L^p 空間への任意のアフィン等長作用が固定点 ($p = 1$ のときは有界軌道) を持つことである. 可算離散群が性質 FL^p を持つことは, すべての $p \in [1, 2]$ で同値であることを Chatterji-Druţu-Haglund [CDH] が示している. 一方, すべての無限双曲離散群は, 十分大きな p に対して性質 FL^p を持たないことが, Yu [Yu05] により示されている. しかし, 性質 FL^2 を持つ無限双曲離散群の存在が知られている. そのため, アフィン等長作用に関して, L^p 空間 $(1 \leq p \leq 2)$ と L^p 空間 $(p > 2)$ はそれぞれ異なった性質を持つといえる.

本講演では, まず, 有限生成群の狭義凸実 Banach 空間へのアフィン等長作用について得られた結果を紹介する. この結果から,「有限生成群が性質 FL^p を持たないかどうか」を判定するために有用と思われる系を導く.

1　狭義凸実 Banach 空間へのアフィン等長作用

Γ を有限生成群とし, K をその有限生成元集合とする. ただし, $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する. また, $(B, \| \ \|)$ を狭義凸実 Banach 空間 (つまり, 任意の単位ベクトル $u, v \in B$ が $\|u + v\| < 2$ を満たす実 Banach 空間) とする. 例えば, L^p 空間 $(1 < p < \infty)$ は狭義凸 Banach 空間である.

$\pi : \Gamma \times B \to B$ を Γ の B への線形等長作用とする. 写像 $c : \Gamma \to B$ が π-コサイクルであるとは, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して $c(\gamma_1\gamma_2) = \pi(\gamma_1, c(\gamma_2)) + c(\gamma_1)$ を満たすことである. また, Γ の B への等長作用 $\alpha : \Gamma \times B \to B$ がアフィンであるとは, Γ の B へのある線形等長作用 ρ とある ρ-コサイクル c により, 任意の $v \in B$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して $\alpha(\gamma, v) = \rho(\gamma, v) + c(\gamma)$ と書けることである. この ρ を α の線形部分と, c をコサイクル部分と呼ぶ. 実は, 実 Banach 空間の等長作用はいつでもアフィンであることが知られている. 線形等長作用 π を線形部分に持つ Γ の B へのアフィン等長作用からなる集合を $\mathcal{A}(\pi)$ とする.

α を Γ の B へのアフィン等長作用とし, $1 \leq r < \infty$ とする. ベクトル $v \in B$ に対して

$$F_{\alpha,r}(v) := \left(\sum_{\gamma \in K} \frac{\|v - \alpha(\gamma, v)\|^r}{|K|}\right)^{1/r}$$

と定義する. このとき v が α の固定点であることと, $F_{\alpha,r}(v) = 0$ は同値である. また,

$$|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) := \max\left\{\limsup_{u \to v, u \in B} \frac{F_{\alpha,r}(v) - F_{\alpha,r}(u)}{\|v - u\|}, 0\right\}$$

と定義する. 関数 $|\nabla_- F_{\alpha,r}|$ は, $F_{\alpha,r}$ が最も減る方向への勾配のノルムとみなせる.

定理 ([Tan])**.** π を Γ の B への線形等長作用とし, $1 \leq r < \infty$ とする. 線形等長作用 π は非自明な固定ベクトルを持たないと仮定する. このとき以下は同値 :

(i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$ が固定点を持つ.

(ii) 正定数 C が存在し, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$ に対して, $F_{\alpha,r}(v) > 0$ である任意の $v \in B$ が $|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) \geq C$ を満たす.

この定理は, 固定点の存在を $|\nabla_- F_{\alpha,r}|$ の評価で判定しているため, 問題が複雑になったように見えるかもしれない. しかし, 狭義凸実 Banach 空間として有限生成群 Γ 上の L^p 空間をとり, その上の正則表現を考えると, 「Γ が性質 FL^p を持たないかどうか」を判定するために有用と思われる系が導かれる.

2　定理の L^p 空間への応用

前の節と同様に, Γ を有限生成群とし, K をその有限生成元集合とする. さらに, $p > 1$ とし, $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する. Lebesgue 空間 $\ell^p(\Gamma)$ とは, 空間が $\{f : \Gamma \to \mathbb{R} \big| \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty\}$ であり, ノルムが $\|f\|_{\ell^p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p)^{1/p}$ の Banach 空間である.

群 Γ 上の実数値関数からなる空間を $\mathcal{F}(\Gamma)$ と表す. 群 Γ の $\mathcal{F}(\Gamma)$ 上の左正則表現 λ_Γ を, $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ と $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して $\lambda_\Gamma(\gamma)f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ と定義する. この表現 λ_Γ の $\ell^p(\Gamma) \subset \mathcal{F}(\Gamma)$ への制限を $\lambda_{\Gamma,p}$ と表す. 表現 $\lambda_{\Gamma,p}$ は, 非自明な固定ベクトルを持たない Γ の $\ell^p(\Gamma)$ への線形等長作用とみなせる.

関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ に対して, $df(\gamma) := \lambda_\Gamma(\gamma)f - f$ と定義する. 関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ が p-Dirichlet 有限であるとは, すべての $\gamma \in K$ で $df(\gamma) \in \ell^p(\Gamma)$ が成り立つことである. すべての p-Dirichlet 有限関数からなる空間を $D_p(\Gamma)$ と表す. ここ

で, 空間 $\ell^p(\Gamma)$ は $D_p(\Gamma)$ の線形部分空間である．空間 $D_p(\Gamma)$ には, $\|f\|_{D_p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma\in K}\|df(\gamma)\|^p_{\ell^p(\Gamma)}/|K|)^{1/p}$ でセミノルムを定めることができる.

関数 $f \in D_p(\Gamma)$ の p-ラプラシアン $\Delta_p f$ を,

$$\Delta_p f(x) := \sum_{\gamma\in K} \frac{|df(\gamma)(x)|^{p-2}(df(\gamma)(x))}{|K|}$$

と定義する．但し, $p \leq 2$ のとき, $df(\gamma)(x) = 0$ ならば $|df(\gamma)(x)|^{p-2} = 0$ とする．Puls [Pul06] による結果から, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ に対して, df_α が α のコサイクル部分と一致する $f_\alpha \in D_p(\Gamma)$ が, 定数和を除いて一意に存在することが分かる．逆に, 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ に対して, df は $\lambda_{\Gamma,p}$-コサイクルである．これらの事実と計算から, $F_{\alpha,p}(f) > 0$ を満たす任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対して,

$$|\nabla_- F_{\alpha,p}|(f) = \frac{2\|\Delta_p(f - f_\alpha)\|_{\ell^q(\Gamma)}}{\|f - f_\alpha\|^{p-1}_{D_p(\Gamma)}}$$

が成り立つことが分かる．但し, q は p の共役指数, つまり $q = p/(p-1)$ である．定理に, この結果と上の事実を用いると, 次の系が導かれる.

系 ([Tan])**.** 以下は同値 :

(i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ が固定点を持つ.

(ii) 正定数 C が存在して, 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \geq C\|f\|^{p-1}_{D_p(\Gamma)}$ を満たす．但し, q は p の共役指数である.

特に $p = 2$ のとき, この系の (ii) は, 線形 2-ラプラス作用素 Δ_2 の $D_2(\Gamma)$ の内積に関するスペクトルの下からの評価を表している．この系から, 実数 $p > 1$ に対して, p-ラプラス作用素 Δ_p のスペクトルに相当するものの評価ができれば, 「Γ が性質 FL^p を持たないかどうか」について判定できる.

参考文献

[CDH] I. Chatterji, C. Druţu, and F. Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint*, to apper in Adv. of Math..

[Pul06] M.J. Puls, *The first L^p-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 391–401.

[Tan] M. Tanaka, *Existence of a fixed point of an isometric action on a global Busemann nonpositive curvature space*, preprint.

[Yu05] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on ℓ^p-spaces*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 1144–1151.