

Busemann 非正曲率空間への等長作用の 固定点の存在について

田中 守 (東北大学大学院理学研究科 D3)

この講演では, コンパクト生成群の Busemann 非正曲率空間への等長作用が固定点を持つための十分条件について紹介する.

(M, d) を完備距離空間とする. M の 2 点 x, y を結ぶ測地線とは, 閉区間 $[0, d(x, y)]$ の等長埋め込み c で $c(0) = x$ と $c(d(x, y)) = y$ を満たすものである. 距離空間 (M, d) の任意の 2 点を結ぶ測地線が存在するとき (M, d) を測地空間という.

定義. 測地空間 (M, d) が Busemann 非正曲率空間であるとは,

$$d(c_1(tl_1), c_2(tl_2)) \leq (1-t)d(c_1(0), c_2(0)) + td(c_1(l_1), c_2(l_2))$$

が任意の 2 測地線 $c_i : [0, l_i] \rightarrow M$ ($i = 1, 2$) と $0 \leq t \leq 1$ に対して成り立つことである.

例. (i) Hadamard 空間: 単連結, 非正曲率, 完備 Riemann 多様体, 木, Hilbert 空間など.

(ii) 狭義凸 Banach 空間: $1 < p < \infty$ の Lebesgue 空間 $L^p([0, 1])$, 数列空間 ℓ^p など.

G をコンパクト生成群, $K \subset G$ をそのコンパクト生成元集合とする. また $\text{Isom}(M, d)$ は等長変換群とし, $\alpha : G \rightarrow \text{Isom}(M, d)$ を連続な準同型とする. この準同型 α は G の M への等長作用と同一視できる. α が固定点を持つとは, 点 $x_0 \in M$ が存在し任意の $g \in G$ に対し $\alpha(g)x_0 = x_0$ を満たすことである.

μ を開集合の測度が正である K 上の確率測度とし, M 上の関数 $F_\alpha^p : M \rightarrow [0, \infty)$ を次で定義する:

$$F_\alpha^p(x) := \left(\int_{g \in K} d(x, \alpha(g)x)^p d\mu(g) \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$
$$F_\alpha^\infty(x) := \sup_{g \in K} d(x, \alpha(g)x).$$

このとき $F_\alpha^p(x_0) = 0$ となることと, α が固定点 x_0 を持つことは同値である.

定義. F_α^p の $x \in M$ における絶対勾配 $|\nabla_- F_\alpha^p|$ を次で定義する.

$$|\nabla_- F_\alpha^p|(x) := \max \left\{ \limsup_{y \rightarrow x, y \in M} \frac{F_\alpha^p(x) - F_\alpha^p(y)}{d(x, y)}, 0 \right\}.$$

この絶対勾配は F_α^p が最も効率よく減少する方向への F_α^p の傾きを表している.

主定理 ([T]). ある定数 $C > 0$ が存在して, $F_\alpha^p(x) \neq 0$ であるすべての $x \in M$ に対して

$$|\nabla_- F_\alpha^p|(x) \geq C$$

を満たすならば, α は固定点を持つ.

この定理の系として, 井関・納谷 ([IN]) に述べられている有限生成群の Hadamard 空間への等長作用が固定点を持つための十分条件が得られる.

B を Banach 空間とし, $O(B)$ を B のすべての全射な線形等長作用素からなる群とする. 連続な準同型 $\pi : G \rightarrow O(B)$ を線形等長表現という. $\text{Aff}(B) = O(B) \ltimes B$ とし, 連続な準同型 $\alpha : G \rightarrow \text{Aff}(B)$ をアフィン等長作用という. (特に B が実 Banach 空間のとき $\text{Aff}(B) = \text{Isom}(B)$ である.) α はある線形等長表現 π とある写像 $c : G \rightarrow B$ により $\alpha(g)v = \pi(g)v + c(g)$ と書ける. この π を α の線形部分という. このとき主定理の十分条件は次のような同値条件となる:

定理 ([T]). G を有限生成群, B を狭義凸 Banach 空間, $1 \leq p \leq \infty$ とする. また, π を非自明な固定ベクトルを持たない G の B への線形等長表現とする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して π を線形部分に持つ任意のアフィン等長作用 α に対して

$$|\nabla_- F_\alpha^p|(v) \geq C$$

を $F_\alpha^p(v) \neq 0$ であるすべての $v \in B$ が満たすことと, そのような任意の α が固定点を持つことは同値である.

参考文献

- [IN] H. IZEKI AND S. NAYATANI, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces*, Geom. Dedicata 114 (2005), 147–188.
- [T] M. TANAKA, *The existence of a fixed point of an isometric action on a global Busemann nonpositive curvature space*, in preparation.