狭義凸Banach空間へのアフィン等長作用の固定点の存在について

田中 守 (東北大学大学院理学研究科 D3)

この講演では, 有限生成群の狭義凸Banach空間上の線形等長表現で非自明な固定ベクトルを持たないものに対して, その表現を線形部分に持つすべてのアフィン等長作用が固定点を持つための必要十分条件について紹介する.

Gを有限生成群, $K \subset G$をその有限生成元集合, $(B, \| \ \|)$を狭義凸Banach空間とする. $O(B)$をB上のすべての可逆な線形等長作用素からなる群とし, $\mathrm{Isom}(B) := O(B) \ltimes B$を$B$上のすべての可逆なアフィン等長変換からなる群とする. 特に, 実Banach空間では等長変換はいつでもアフィンとなる.

GのB上の**線形等長表現**とは, 連続な準同型$\pi : G \to O(B)$である. 同様に, GのB上の**アフィン等長作用**とは, 連続な準同型$\alpha : G \to \mathrm{Isom}(B)$である. アフィン等長作用$\alpha$は$\alpha(g)v = \pi(g)v + c(g)$と書ける. ここで$\pi : G \to O(B)$は線形等長表現で (これを$\alpha$の線形部分と呼ぶ), $c : G \to B$は連続なπ-コサイクル, つまり$c(gh) = \pi(g)c(h) + c(g)$を満たす写像である. π-コサイクルからなる線形空間を$Z^1(\pi)$と表す. π-コサイクルは生成元集合上の値により完全に決定される. 線形写像$b : B \to Z^1(\pi)$を$v \mapsto (b(v))(\cdot) := v - \pi(\cdot)v$により定義し, 各$b(v)$を$\pi$-コバウンダリーという. π-コバウンダリーからなる$Z^1(\pi)$の部分空間を$B^1(\pi)$と表す. $Z^1(\pi)$は線形部分πを持つすべてのアフィン等長変換を表し, $B^1(\pi)$はその中で固定点を持つものを表す. ここでアフィン等長作用αが**固定点**を持つとは, 点$v_0 \in B$が存在し任意の$g \in G$が$\alpha(g)v_0 = v_0$を満たすことである. **π-コホモロジー**を

$$H^1(G, \pi) := Z^1(\pi)/B^1(\pi)$$

と定義する. $H^1(G, \pi) = 0$であることとπを線形部分として持つ任意のアフィン等長作用が固定点を持つことは同値である.

$Z^1(\pi)$ はノルム

$$\|c\|_p := \left(\sum_{g\in K} \|c(g)\|^p m(g)\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty),\ \ \|c\|_\infty := \sup_{g\in K} \|c(g)\|$$

により Banach 空間となる. ここで $m : K \to (0,1)$ は $\sum_{g\in K} m(g) = 1$ を満たす重みとする.

線形部分 π, コサイクル c を持つアフィン等長作用 α に対し関数 $F_\alpha^p : B \to [0,\infty)$ を次で定義する $(1 \le p \le \infty)$:

$$F_\alpha^p(v) := \|c - b(v)\|_p.$$

このとき $F_\alpha^p(v_0) = 0$ となることと, α が固定点 v_0 を持つことは同値である.

定義. F_α^p の $v \in B$ における**絶対勾配** $|\nabla_- F_\alpha^p|$ を次で定義する.

$$|\nabla_- F_\alpha^p|(v) := \max\left\{\limsup_{u\to v, u\in B} \frac{F_\alpha^p(v) - F_\alpha^p(u)}{\|v-u\|}\ ,\ 0\right\}.$$

この絶対勾配は F_α^p が最も効率よく減少する方向への F_α^p の傾きを表している.

定理 ([T])**.** $1 \le p \le \infty$ とし, π を非自明な固定ベクトルを持たない G の B への線形等長作用とする. このとき, $H^1(G,\pi) = 0$ であることと, π を線形部分に持つ任意のアフィン等長変換 α に対して定数 $C > 0$ が存在して

$$|\nabla_- F_\alpha^p|(v) \ge C$$

を $F_\alpha^p(v) \neq 0$ であるすべての $v \in B$ が満たすことは同値である.

例えば B が $L^p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$ の場合に, 絶対勾配 $|\nabla_- F_\alpha^2|$ を具体的に表すことができる (但し, 生成元集合 K はその元の逆元も含むように取り, 重みは $m(g) = m(g^{-1})$ を満たすとする):

命題 ([T])**.** $F_\alpha^2(f) \neq 0$ である $f \in L^p([0,1])$ に対し

$$|\nabla_- F_\alpha^2|(f) = \frac{2}{F_\alpha^2(f)} \left\| \sum_{g\in K} ((c - b(f))(g))^{p/q} m(g) \right\|_{L^q([0,1])}.$$

但し, $q = p/(p-1)$ であり, $t \in [0,1]$ に対し $a^{p/q}(t) := \mathrm{sign}(a(t))|a(t)|^{p/q}$ である.

参考文献

[T] M. Tanaka, *The existence of a fixed point of an isometric action on a global Busemann nonpositive curvature space*, in preparation.