

Banach 空間に対する固定点性質 と同変写像のエネルギー

田中 守 東北大学大学院理学研究科数学専攻 D2

この講演では, 有限生成群の Banach 空間への等長作用に対して, 固定点の存在と, 同変写像のエネルギーの振る舞いとの関係について得られた結果を述べる.

定義 1. B を Banach 空間とする. 有限生成群 Γ が性質 (F_B) を持つとは, Γ の B への任意の等長作用 $\rho : \Gamma \times B \rightarrow B$ が固定点を持つことである.

Γ を有限生成群とし, Γ は Γ に左から自然に作用しているとする. Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ を 1 つ固定する. Γ の B への等長作用 $\rho : \Gamma \times B \rightarrow B$ はアフィンなので, 線形な等長作用 $\rho_0 : \Gamma \times B \rightarrow B$ と写像 $o : \Gamma \rightarrow B$ が存在し, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と $v \in B$ に対し, $\rho(\gamma, v) = \rho_0(\gamma, v) + o(\gamma)$ と表せる. この ρ_0 により固定されるベクトルからなる閉部分空間を B^{ρ_0} で表す. $B' := B/B^{\rho_0}$ とし, $[v] \in B'$ で $v \in B$ の同値類を表す. B' は Banach 空間となる. Γ の B' への等長作用 $\rho' : \Gamma \times B' \rightarrow B'$ を, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と $[v] \in B'$ に対し, $\rho'(\gamma, [v]) := [\rho_0(\gamma, v)] + [o(\gamma)]$ で定義する.

ρ' -同変写像 $f : \Gamma \rightarrow B'$ とは, 任意の $\gamma, \alpha \in \Gamma$ に対し $f(\gamma\alpha) = \rho'(\gamma, f(\alpha))$ となる写像である. 任意の ρ' -同変写像 f は, 単位元 e での値 $f(e)$ により一意に決まる.

S を Γ の生成元とそれらの逆元からなる有限集合とする. ただし, 単位元 e は S に含まれないとする. また, $\sum_{\gamma \in S} m(\gamma) = 1$ となる関数 $m : S \rightarrow (0, \infty)$ をとる. このとき, ρ' -同変写像 $f : \Gamma \rightarrow B'$ のエネルギーを,

$$E_{\rho'}(f) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in S} m(\gamma) \|f(e) - f(\gamma)\|^2$$

で定義する. もし $E_{\rho'}(f) = 0$ ならば, 生成元集合上で f の値が等しくなる. そのため, B' の作り方から, B に $\rho(\Gamma)$ の固定点が存在することがわかる.

また, ρ' -同変写像 $f : \Gamma \rightarrow B'$ における $E_{\rho'}$ の絶対勾配 $|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)$ を

$$|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f) := \max \left\{ \limsup_{g(e) \rightarrow f(e), g: \rho' \text{-同変写像}} \frac{E_{\rho'}(f) - E_{\rho'}(g)}{\|f(e) - g(e)\|}, 0 \right\}$$

で定義する. このとき, $|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)^2 \leq 8E_{\rho'}(f)$ が成り立ち, $|\nabla_{-E_{\rho'}}|$ は各写像で有界値をとる. 定義から $|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)$ は f での $E_{\rho'}$ の勾配のノルムとみなすことができる.

定義 2. B を Banach 空間とする. Γ が性質 (E_B) を持つとは, Γ の B への非自明な任意の等長変換 $\rho: \Gamma \times B \rightarrow B$ に対し, 定数 $C(\rho) > 0$ が存在し, 任意の ρ' -同変写像 $f: \Gamma \rightarrow B'$ に対し

$$|\nabla - E_{\rho'}|(f)^2 \geq C(\rho)E_{\rho'}(f)$$

が成り立つことである.

性質 (E_B) は, 生成元集合 S と m の取り方に依らない. (しかし, $C(\rho)$ が同じとは限らない.)

次の定理と本質的に同等の結果が砂田 [1] により示されている.

定理 1. ([1] 参照) Γ が任意の Hilbert 空間 H で性質 (F_H) を持つことと, Γ が任意の Hilbert 空間 H で性質 (E_H) を持つことは同値である. このとき, 性質 (E_H) の定数 $C(\rho)$ として, Hilbert 空間 H と等長作用 ρ に依らない定数 $C > 0$ をとることができる.

このとき, Banach 空間に対して, 次が成り立つことを示した.

定理 2. ([2]) B を Banach 空間とする. このとき, Γ が性質 (F_B) を持つならば, 性質 (E_B) を持つ.

性質 (E_B) が性質 (F_B) を導くかどうかはわかっていないが, 性質 (E_B) の条件を線形部分が非自明な等長作用のみに限ると, 一般には性質 (F_B) を導かないことがわかっている.

さらに, Banach 空間の族に対して, 次の定理が成り立つことを示した.

定理 3. ([2]) V を一様凸 Banach 空間とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta_B(\epsilon) \geq \delta_V(\epsilon)$ を満たすすべての一様凸 Banach 空間 B からなる族 $\mathcal{L}_V$ を取ってくる. このとき, 任意の $B \in \mathcal{L}_V$ に対し Γ が性質 (F_B) を持つならば, 任意の $B \in \mathcal{L}_V$ に対し性質 (E_B) を持つ. ただし, 性質 (E_B) の定数 $C(\rho)$ は ρ, B に依存しないようにとれる.

この定理は, 定数 $C(\rho)$ が ρ と B に依らずにとれるので, 定理 2 の系ではないことを注意しておく. ここで, Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ が一様凸とは, 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\delta_B(\epsilon) := \inf\{1 - \|u + v\|/2 : \|u\|, \|v\| \leq 1 \text{ かつ } \|u - v\| \geq \epsilon\} > 0$$

が成り立つことである. 例えば, Hilbert 空間や Lebesgue 空間 $L_p([0, 1])$ は一様凸 Banach 空間である.

参考文献

- [1] 砂田利一, 基本群とラプラシアン, 紀伊国屋書店, 1988.
- [2] M. TANAKA, The energy of equivariant maps and a fixed-point property for Busemann nonpositive curvature spaces, preprint.