Banach空間に対する固定点性質と同変写像のエネルギー

田中 守　東北大学大学院理学研究科数学専攻D2

Γ：有限生成群

S：Γの生成元集合 ($S = S^{-1},\ e \notin S$)

$(B, \| \ \|)$：Banach空間

Γ のB へのアフィンな等長作用$\rho : \Gamma \times B \to B$ は，ある線形な等長作用 $\rho_0 : \Gamma \times B \to B$ とある写像$o : \Gamma \to B$により，$\rho(\gamma, v) = \rho_0(\gamma, v) + o(\gamma)$ と表される．(実Banach空間の等長作用はアフィンである．)

このとき，$B' := B/\{v \in B \mid \rho_0(\gamma, v) = v,\ \forall\gamma \in \Gamma\}$ とし，ΓのB'へのアフィンな等長作用$\rho' : \Gamma \times B' \to B'$ を，$\rho'(\gamma, [v]) := [\rho(\gamma, [v])]$ で定義する．

$\mathcal{M}_{\rho'} := \{f : \Gamma \to B' \mid f(\gamma\alpha) = \rho'(\gamma)f(\alpha)\ \forall\gamma, \forall\alpha\}$ とし, $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ に対し $\|f\| := \|f(e)\|$ とする.
条件 $\sum_{\gamma\in S} m(\gamma) = 1$ と $m(\gamma) = m(\gamma^{-1})$ を満たす関数 $m : S \to (0, \infty)$ を 1 つ固定する.

<u>定義</u>. エネルギー汎関数 $E_{\rho'} : \mathcal{M}_{\rho'} \to [0, \infty)$ を,

$$E_{\rho'}(f) := \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in S} m(\gamma)\|f(e) - f(\gamma)\|^2$$

で定義する.

- $E_{\rho'}(f) = 0 \Leftrightarrow f(e)$ は $\rho'(\Gamma)$ の固定点.
- B' が一様凸 Banach 空間ならば, $E_{\rho'}$ は凸関数.

定義. $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ における $E_{\rho'}$ の絶対勾配 $|\nabla_- E_{\rho'}|(f)$ を

$$|\nabla_- E_{\rho'}|(f) := \max\left\{ \limsup_{g \to f,\ g \in \mathcal{M}_{\rho'}} \frac{E_{\rho'}(f) - E_{\rho'}(g)}{\|f - g\|}\ ,\ 0 \right\}$$

で定義する.

定理 1. (T.) Γ の B への任意のアフィンな等長作用 ρ が固定点を持つならば, 定数 $C(\rho) > 0$ が存在し, 任意の $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ に対し

$$|\nabla_- E_{\rho'}|(f)^2 \geq C(\rho) E_{\rho'}(f)$$

が成り立つ.

事実. B が Hilbert 空間ならば, 定理 1 の逆が成り立つ.

<u>**定理**</u> 2. (T.) **凸率を下から抑えた一様凸**Banach **空間からなる族**$\mathcal{L}$ **に対し以下が成り立つ:**
任意の$B \in \mathcal{L}$**と**, Γ**の**B**への任意のアフィンな等長作用**ρ**が固定点を持つならば**, **定数**$C > 0$**が存在し**, **任意の**$B \in \mathcal{L}$ **の任意の**$f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ **に対し**,

$$|\boldsymbol{\nabla}_{-}\boldsymbol{E}_{\rho'}|(f)^2 \geq C\boldsymbol{E}_{\rho'}(f)$$

が成り立つ. **ただし**, C **は**B **や**ρ**に依存しない定数である**.

<u>**事実**</u>. $\mathcal{L}$**がすべての**Hilbert **空間からなる族ならば**, **定理**2**の逆が成り立つ**.