

Busemann 非正曲率空間に対する固定点性質と同変写像のエネルギー

(The energy of equivariant maps and a fixed-point property for
Busemann nonpositive curvature spaces)

田中 守 東北大学大学院理学研究科数学専攻 D2
(Mamoru Tanaka Mathematical Institute Tohoku University)

1 序

Kazhdan の性質 (T) (定義 2.1 の (ii) を参照) を持つ群は, 群論, 組合せ論, 作用素環論, エルゴード理論, 力学系理論などの立場から盛んに研究されてきた. Hilbert 空間上のユニタリ表現に関する性質である Kazhdan の性質 (T) と, 幾何学との繋がりを示唆する結果の 1 つとして, Guichardet, Delorme らによる Kazhdan の性質 (T) と Hilbert 空間に対する固定点性質 (FH) との同値性が挙げられる. ここで, 群 Γ が固定点性質 (FH) を持つとは, Γ の任意の Hilbert 空間への任意の等長作用が固定点を持つことをいう. この同値性は, しばしば Kazhdan の性質 (T) の幾何学的な視点からの研究の糸口になってきた. 例えば, 固定点性質 (FH) は, Γ から Hilbert 空間への同変写像のエネルギーに関する性質 (EH) (定義 4.1 の (ii) を参照) と同値であることがよく知られており, 本質的にこの事実と同等の結果およびその帰結が [砂田] 等で論じられている.

一方, Bader, Furman, Gelander, Monod らは, Kazhdan の性質 (T) と固定点性質 (FH) とに類似する性質を Banach 空間 B に対して定義し, これらの性質の同値性について考察している. この講演では, これらの性質を, Hilbert 空間の場合と同様に, Γ から Hilbert 空間への同変写像のエネルギーに関する性質を通して捉えることを試み, 得られた結果を紹介する.

また, 井関, 近藤, 納谷らは, 固定点性質 (FH) と同変写像のエネルギーに関する性質 (EH) を $CAT(0)$ 空間に対して拡張し, それらの性質の同値性を示している. そこで, Hilbert 空間に対する性質を Banach 空間に対する類似の性質で捉えなおしたように, $CAT(0)$ 空間に対するこれらの性質を, Busemann 非正曲率空間に対する性質として捉えなおし, その間の関係について得られた結果を紹介する.

2 Kazhdan の性質と固定点性質

この章では, Kazhdan の性質 (T) , 固定点性質 (FH) , 性質 (T_B) , 性質 (F_B) の定義と, それらの間の関係を振り返る.

Γ を有限生成群とし, S を Γ の生成集合とする. Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ を 1 つ固定し, $(B, \|\cdot\|)$ の線形等長変換群を $O(B)$ と表す. 準同型 $\rho_0 : \Gamma \rightarrow O(B)$ を, B 上の線形等長 Γ -表現という. このとき, $B^{\rho_0(\Gamma)}$ で $\rho_0(\Gamma)$ -固定ベクトルからなる閉部分空間を表すと, $B' := B/B^{\rho_0(\Gamma)}$ は Banach 空間になる. $[v] \in B'$ で $v \in B$ の同値類を表す. このとき ρ_0 に対して, B' 上の線形等長 Γ -表現 $\rho'_0 : \Gamma \rightarrow O(B')$ が $\rho'_0(\gamma)[v] := [\rho_0(\gamma)v]$ により定義される. (ρ'_0 は既約な線形等長表現と見なせる.)

定義 2.1. (i) Γ が性質 (T_B) を持つとは, 非自明な任意の線形等長 Γ -表現 $\rho_0 : \Gamma \rightarrow O(B)$ に対し, 定数 $C(\rho_0) > 0$ が存在し, $\|[v]\| = 1$ を満たす任意の $[v] \in B'$ に対し

$$\max_{\gamma \in S} \|[v] - \rho'_0(\gamma)[v]\| \geq C(\rho_0)$$

が成り立つことである.

(ii) Γ が Kazhdan の性質 (T) を持つとは, 任意の Hilbert 空間 H に対して, Γ が性質 (T_H) を持つことである.

注意. Kazhdan の性質 (T) では, $C(\rho_0)$ の代わりに Hilbert 空間 H と線形等長 Γ -表現 ρ_0 に依らない定数 $C > 0$ をとれる. また, 性質 (T_B) , Kazhdan の性質 (T) は生成元集合 S の取り方に依らない. (ただし, $C(\rho_0)$ または C の値は同じとは限らない.)

Kazhdan の性質 (T) を持つ有限生成群の例として, 特殊直交群 $SO_n(\mathbb{Z})$ ($n \geq 3$) や, シンプレクティック群 $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ ($n \geq 2$) を挙げることができる. また, Kazhdan の性質 (T) を持たない有限生成群の例には, $\mathbb{Z}^n$ や自由群 F_n ($n \geq 1$) などがある ([BHV] 参照).

定理 2.2. ([BFGM07]) $p \in (1, \infty)$ とする. このとき, Γ が性質 (T) を持つことと, Γ が性質 $(T_{L_p([0,1])})$ を持つことは同値である.

$(B, \|\cdot\|)$ の等長変換群を $\text{Isom}(B)$ と表す. B 上の等長 Γ -表現とは, 準同型 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(B)$ である.

定義 2.3. (i) Γ が性質 (F_B) を持つとは, 任意の等長 Γ -表現 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(B)$ に対し, $\rho(\Gamma)$ が固定点を持つことである.

(ii) Γ が固定点性質 (FH) を持つとは, 任意の Hilbert 空間 H に対して, Γ が性質 (F_H) を持つことである.

定理 2.4. ([Gui72], [Del77]) Γ が固定点性質 (FH) を持つことと, Γ が Kazhdan の性質 (T) を持つことは同値である.

定理 2.5. ([BFGM07])

- B を Banach 空間とする. Γ が性質 (F_B) を持つならば, Γ は性質 (T_B) を持つ.
- Γ に対して, 定数 $\epsilon(\Gamma) > 0$ が存在し, 次を満たす: $p \in (1, 2 + \epsilon(\Gamma))$ としたとき, Γ が性質 (T) を持つならば, Γ は性質 $(F_{L_p([0,1])})$ を持つ.

この定理から, Γ に依存した定数 $\epsilon(\Gamma)$ があり, $p \in (1, 2 + \epsilon(\Gamma))$ としたとき, Γ が性質 (T) を持つことと, Γ が性質 $(F_{L_p([0,1])})$ を持つことが同値であることがわかる. しかし, p が十分大きいときには, この同値性が成り立たない Γ の例が存在する ([BHV] 参照). よって, 定理 2.2 より, Γ が性質 (T_B) を持つとしても, 一般に性質 (F_B) を持つとは限らない.

他に, 性質 (T_B) を持つが性質 (F_B) を持たない簡単な例に, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$ がある. $O(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, つまり, 線形等長変換は恒等写像または対心写像: $x \mapsto -x$ のみであり, Γ は性質 $(T_{\mathbb{R}})$ を持つことが容易にわかる. しかし, $\mathbb{R}$ に $n \in \mathbb{Z}$ が平行移動 $n \cdot x := x + nx_0$ ($x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$) で作用するとき固定点を持たない. よって, $\mathbb{Z}$ は性質 $(F_{\mathbb{R}})$ は持たない.

3 Banach 空間に対するエネルギーと絶対勾配

この章では, 有限生成群から Banach 空間への同変写像のエネルギーと, その絶対勾配の定義をする. 有限生成群 Γ とその生成元集合 S を 2 章と同様にとる. また, Γ が左から自然に Γ に作用しているとする.

Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ を 1 つ固定する. Banach 空間上の等長変換はアファインなので ([BL00] 参照), 任意の等長 Γ -表現 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(B)$ に対し, 線形等長 Γ -表現 $\rho_0: \Gamma \rightarrow O(B)$ と写像 $o: \Gamma \rightarrow B$ が存在し, 任意の $v \in B$ と $\gamma \in \Gamma$ に対し, $\rho(\gamma)v = \rho_0(\gamma)v + o(\gamma)$ と表せる. この ρ_0 に対して, 2 章と同様に, $B' := B/B^{\rho_0(\Gamma)}$ と定義し, B' 上の線形等長 Γ -表現 ρ'_0 を $\rho'_0(\gamma)[v] := [\rho_0(\gamma)v]$ で定義する. また, 等長 Γ -表現 ρ' を, 任意の $[v] \in B'$ と $\gamma \in \Gamma$ に対し, $\rho'(\gamma)[v] := \rho'_0(\gamma)[v] + [o(\gamma)]$ で定義する. このとき,

$$\mathcal{M}_{\rho'} := \{f: \Gamma \rightarrow B' : \rho'\text{-同変}\}$$

とする. ここで写像 $f: \Gamma \rightarrow B'$ が ρ' -同変とは, 任意の $\gamma, \alpha \in \Gamma$ に対し $f(\gamma\alpha) = \rho'(\gamma)f(\alpha)$ となることである. よって, 任意の ρ' -同変写像 $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ は $f(e)$ により一意に決まる. $\mathcal{M}_{\rho'}$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\rho'}}$ を, $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ に対し $\|f\|_{\mathcal{M}_{\rho'}} := \|f(e)\|$ で定義する. このとき, $f \mapsto f(e)$ により $(\mathcal{M}_{\rho'}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\rho'}})$ と $(B', \|\cdot\|)$ を同一視できる.

$\mathcal{M}_{\rho'}$ 上のエネルギー汎関数を定義するために, $\sum_{\gamma \in S} m(\gamma) = 1$ となる関数 (weight) $m: S \rightarrow (0, \infty)$ を 1 つ固定する.

定義 3.1. エネルギー汎関数 $E: \mathcal{M}_{\rho'} \rightarrow [0, \infty)$ を, $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ に対し

$$E_{\rho'}(f) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in S} m(\gamma) \|f(e) - f(\gamma)\|^2$$

で定義する.

この定義から, $E_{\rho'}(f) = 0$ のとき, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(e) = f(\gamma) = \rho'(\gamma)f(e)$ である. つまり, $f(e)$ は $\rho'(\Gamma)$ の固定点である. よって, B' の作り方から, B に $\rho(\Gamma)$ の固定点が存在することがわかる. ゆえに, 同変写像のエネルギーを考えることで, 固定点性質について調べることができる. また, $E_{\rho'}$ は $(\mathcal{M}_{\rho'}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\rho'}})$ 上連続である.

定義 3.2. $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ における $E_{\rho'}$ の絶対勾配 $|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)$ を

$$|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f) := \max \left\{ \limsup_{g \rightarrow f, g \in \mathcal{M}_{\rho'}} \frac{E_{\rho'}(f) - E_{\rho'}(g)}{\|f - g\|_{\mathcal{M}_{\rho'}}}, 0 \right\}$$

で定義する.

簡単な計算から $|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)^2 \leq 8E_{\rho'}(f)$ となることがわかる. よって, $|\nabla_{-E_{\rho'}}|$ は各写像で有界値をとる. また, その定義から $|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)$ を f での $E_{\rho'}$ の勾配のノルムとみなすことができる.

4 Banach 空間に対する結果

この章では, Kazhdan の性質や固定点性質を, 同変写像のエネルギーの観点から調べ, 得られた結果を紹介する. 有限生成群 Γ とその生成元集合 S を 2 章と同様にとる. また, weight m をとる. さらに, Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ を 1 つ固定する.

定義 4.1. (i) Γ が性質 (E_B) を持つとは, 非自明な任意の等長 Γ -表現 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(B)$ に対し, 定数 $C(\rho) > 0$ が存在し, 任意の ρ' -同変写像 $f : \Gamma \rightarrow B'$ に対し

$$|\nabla_{-E_{\rho'}}|(f)^2 \geq C(\rho)E_{\rho'}(f)$$

が成り立つことである.

(ii) Γ が性質 (EH) を持つとは, 任意の Hilbert 空間 H に対して, Γ が性質 (E_H) を持つことである.

注意. Kazhdan の性質と同様に, 性質 (EH) では, $C(\rho)$ の代わりに Hilbert 空間 H と等長 Γ -表現 ρ に依らない定数 $C > 0$ をとれることが示せる. また, 性質 (E_B) , 性質 (EH) は生成元集合 S と weight m の取り方に依らない. (ただし, $C(\rho)$ または C の値は同じとは限らない.)

つぎの定理と本質的に同等の結果が [砂田] 中で述べられている.

定理 4.2. ([砂田] 参照) Γ が Kazhdan の性質 (T) を持つことと, 性質 (EH) を持つことは同値である.

一方, Banach 空間に対して, 性質 (F_B) と性質 (T_B) のときと同様に, 以下のような結果を得た.

定理 4.3. ([T]) 任意の Banach 空間 B に対して, Γ が性質 (F_B) を持つならば, Γ は性質 (E_B) を持つ.

性質 (E_B) が性質 (F_B) を導くかどうかはわかっていない. しかし, 次の性質 $(E_B)'$ が一般に性質 (F_B) を導かないことを, 以下の命題 4.5 を用いることにより証明できる.

定義 4.4. Γ が性質 $(E_B)'$ を持つとは, 線形部分 ρ_0 が非自明な任意の等長 Γ -表現 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(B)$ に対し, 定数 $C(\rho) > 0$ が存在し, 任意の ρ' -同変写像 $f : \Gamma \rightarrow B'$ に対し

$$|\nabla_{-E_{\rho'}}(f)|^2 \geq C(\rho)E_{\rho'}(f)$$

が成り立つことである.

命題 4.5. ([T]) Γ を有限生成可換群とし, B を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とする. もし, Γ が性質 (T_B) を持つならば, 性質 $(E_B)'$ を持つ.

ここで, 一様凸で一様に滑らかな Banach 空間は以下のように定義される: Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ に対して, 関数 $\delta_B : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$

$$\delta_B(\epsilon) := \inf\{1 - \|u + v\|/2 : \|u\|, \|v\| \leq 1 \text{ かつ } \|u - v\| \geq \epsilon\}$$

を B の凸率という. 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta_B(\epsilon) > 0$ が成り立つとき, Banach 空間 B を一様凸という. 同様に, 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta_{B^*}(\epsilon) > 0$ が成り立つとき, Banach 空間 B を一様に滑らかという. ただし, B^* は B の双対空間である. 例えば, Hilbert 空間や Lebesgue 空間 $L_p([0, 1])$ は一様凸一様に滑らかな Banach 空間である.

注意. 可換な無限群は, Kazhdan の性質 (T) を持たないことが知られており, Γ が可換というのは, 非常に強い仮定である. しかし, 先に述べたように, この命題 4.5 により, 性質 $(E_B)'$ が一般には性質 (F_B) を導かないことがわかる. 実際, $B = \mathbb{R}$ に対し, $\Gamma = \mathbb{Z}$ は性質 $(T_{\mathbb{R}})$ を持つので, この命題より, 性質 $(E_{\mathbb{R}})$ も持つことがわかる. しかし, $\mathbb{Z}$ は性質 $(F_{\mathbb{R}})$ を持たなかった.

さらに, 固定点性質 (FH) と性質 (EH) を, Banach 空間の族に対して一般化した性質について, 次の定理が成り立つ.

定理 4.6. ([T]) V を一様凸 Banach 空間とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta_B(\epsilon) \geq \delta_V(\epsilon)$ を満たすすべての一様凸 Banach 空間 B からなる族 $\mathcal{L}_V$ をとる. このとき, Γ が任意の $B \in \mathcal{L}_V$ に対し性質 (F_B) を持つならば, Γ は任意の $B \in \mathcal{L}_V$ に対し性質 (E_B) を持つ. さらに, 性質 (E_B) の定数 $C(\rho)$ は ρ, B に依存しないようにとることができる.

この定理は, 後で示す 7 章の定理 7.2 の系である. 定数 $C(\rho)$ が各 ρ と B に依らずにとれるので, 定理 4.3 の系ではないことを注意しておく.

5 Busemann 非正曲率空間に対するエネルギーと絶対勾配

この章では, Busemann 非正曲率空間の定義と例を述べ, さらに, この空間での同変写像のエネルギーと絶対勾配の定義をする. Busemann 非正曲率空間の基本的な性質については [Jos97] や [Pap05] を参照.

任意の 2 点を最短測地線で結べる距離空間を測地的距離空間という.

定義 5.1. 完備な測地的距離空間 (N, d) が Busemann 非正曲率空間であるとは, 任意の 3 点 $p, q, r \in N$ に対して, p と q , p と r をそれぞれ結ぶ任意の最短測地線 $c_i : [0, l_i] \rightarrow N$ ($i = 1, 2$) に対し, $d(c_1(l_1/2), c_2(l_2/2)) \leq d(q, r)/2$ が成り立つことである.

CAT(0) 空間 (例えば完備非正曲率 Riemann 多様体, Bruhat-Tits ビルディング, 木, Hilbert 空間など) や, 強凸 Banach 空間 (例えば Lebesgue 空間 $L_p([0, 1])$ ($1 < p < \infty$)) は Busemann 非正曲率空間の例である.

定理 5.2. ([Jos97] 参照) Busemann 非正曲率空間 (N, d) において, 任意の 2 つの最短測地線 $c_i : [0, l_i] \rightarrow N$ ($i = 1, 2$) に対し, $t \mapsto d(c_1(t/l_1), c_2(t/l_2))$ は $[0, 1]$ 上 t に関して凸となる. よって, 任意の 2 点の間の最短測地線は一意的である.

3 章とほぼ同様であるが, 以下に, 有限生成群から Busemann 非正曲率空間への同変写像のエネルギーと, その絶対勾配の定義と性質を述べる.

有限生成群 Γ と, 生成元集合 S を 2 章と同様にとる. また, Γ には左から自然に Γ が作用しているとする. (N, d) を Busemann 非正曲率空間, $\text{Isom}(N, d)$ をその等長変換群とする. 準同形 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(N, d)$ に対し,

$$\mathcal{M}_\rho := \{f : \Gamma \rightarrow N : \rho\text{-同変}\}$$

とし, その距離を $d_{\mathcal{M}_\rho}(f, g) = d(f(e), g(e))$ で定義する. このとき, 3 章と同様に $(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ と (N, d) を同一視できる. weight m を固定する.

定義 5.3. エネルギー汎関数 $E_\rho : \mathcal{M}_\rho \rightarrow [0, \infty)$ を $f \in \mathcal{M}_\rho$ に対し

$$E_\rho(f) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in S} m(\gamma) d(f(e), f(\gamma))^2$$

で定義する.

$E_\rho(f) = 0$ のとき, $f(e)$ は $\rho(\Gamma)$ の固定点である. つまり, $\rho(\Gamma)$ は N 上に固定点を持つ. また, E は $(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ 上連続である. この場合にも E_ρ の勾配のノルムに相当する絶対勾配が以下のようにして定義される.

定義 5.4. $f \in \mathcal{M}_\rho$ における E_ρ の絶対勾配 $|\nabla_- E_\rho|(f)$ を

$$|\nabla_- E_\rho|(f) := \max \left\{ \limsup_{g \rightarrow f, g \in \mathcal{M}_\rho} \frac{E_\rho(f) - E_\rho(g)}{d_{\mathcal{M}_\rho}(f, g)}, 0 \right\}$$

で定義する.

さらに, $|\nabla - E_\rho|(f)^2 \leq 8E_\rho(f)$ も成り立ち, $|\nabla - E_\rho|$ は各写像で有界値をとる.

Busemann 非正曲率空間では, エネルギー汎関数に対して以下の補題と命題が成り立つ.

補題 5.5. ([Jos97]) エネルギー汎関数 E_ρ は $(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ の測地線に沿って凸である.

ρ -同変写像 $f \in \mathcal{M}_\rho$ がエネルギー汎関数 E_ρ の極小値をとるとき, f は調和であるという. 特に, $E_\rho(f) = 0$ のとき, f は調和写像である.

命題 5.6. ([May98])

(i) $|\nabla - E_\rho|$ は $(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ 上で下半連続である.

(ii) $f \in \mathcal{M}_\rho$ が調和であることと, $|\nabla - E_\rho|(f) = 0$ が成り立つことは同値である.

補題 5.7. ([T]) $\inf_{f \in \mathcal{M}} |\nabla - E_\rho|(f) = 0$.

Busemann 非正曲率空間では, 上の補題より $i \rightarrow \infty$ のとき $|\nabla - E_\rho|(f_i) \rightarrow 0$ となる $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}_\rho$ が存在する. 特に, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ がある $f_\infty \in \mathcal{M}_\rho$ に収束したならば, 上の命題より f_∞ は調和写像である.

6 距離空間の超極限

超極限とは, ある意味で距離空間の Gromov-Hausdorff 極限の概念を拡張したものである. この概念は, 7章において Hilbert 空間の族に対する性質 (EH) や性質 (FH) を, Busemann 非正曲率空間の族 (または, Banach 空間の族) に拡張するために必要である. 以下に, 距離空間の超極限の定義とその性質を述べる. 詳しくは [BH99] や [Kap01] を参照.

$\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルターとは $2^\mathbb{N}$ の部分集合 ω で, 以下の 5 条件を満たすものである:

- (i) $\emptyset \notin \omega$ かつ $\mathbb{N} \in \omega$;
- (ii) $A \in \omega$ かつ $A \subset B$ ならば, $B \in \omega$;
- (iii) $A \in \omega$ かつ $B \in \omega$ ならば, $A \cap B \in \omega$;
- (iv) 任意の $A \subset \mathbb{N}$ に対し $A \in \omega$ または $\mathbb{N} \setminus A \in \omega$ が成り立つ;
- (v) 任意の有限集合 $B \subset \mathbb{N}$ は ω に含まれない.

任意の一様有界列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対し, $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \epsilon\} \in \omega$ を任意の $\epsilon > 0$ に対して満たす $l \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在する. この l を $\omega\text{-}\lim_n a_n$ と表す.

定義 6.1. ω を $\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルターとする. $\{(M_n, d_n, o_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を点付き距離空間の列とする. M_∞ で $\sup_{n \in \mathbb{N}} d_n(p_n, o_n)$ が有界な点列 $(p_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$ の集合を表す. $(p_n) \in M_\infty$ と $(q_n) \in M_\infty$ は $\omega\text{-}\lim_n d_n(p_n, q_n) = 0$ を満たすとき同値であるという. (p_n) の同値類を p_ω または $\omega\text{-}\lim_n p_n$ と表し, 同値類の集合を M_ω と表す. M_ω 上の距離を $p_\omega, q_\omega \in M_\omega$ に対し $d_\omega(p_\omega, q_\omega) := \omega\text{-}\lim_n d_n(p_n, q_n)$ で定義する. この距離空間を (M_ω, d_ω) または $\omega\text{-}\lim_n (M_n, d_n, o_n)$ と表し, 点付き距離空間の列 $\{(M_n, d_n, o_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ の ω による超極限という. 超極限はいつでも完備である.

超極限での同変写像やエネルギー汎関数も自然に定義できる. Γ を有限生成群とし, $\{(M_n, d_n, o_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を点付き距離空間の列とする. また, $\{\rho_n : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(M_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を準同形の列とする. M_n で Γ から M_n への ρ_n -同変写像の集合を表し, E_n で M_n 上のエネルギー汎関数を表すとする. このとき, 各 $\gamma \in \Gamma$ で $(\rho_n(\gamma)o_n) \in M_\infty$ ならば, 極限準同形 $\rho_\omega : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(M_\omega, d_\omega)$ が, 定義できる. さらに, ρ_ω -同変な極限写像 $f_\omega : \Gamma \rightarrow M_\omega$ や, エネルギー汎関数 $E_\omega : M_\omega \rightarrow [0, \infty)$ も定義できる.

以下, $\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルター ω を固定し, 距離空間の超極限の性質をいくつか挙げる.

補題 6.2. (M, d) を proper な距離空間とし, $o \in M$ を任意の点とする. ここで proper とは, 有界閉集合がコンパクトであることである. このとき, $\omega\text{-}\lim_n(M, d, o)$ と (M, d) は等長同型である.

しかし, 上の補題において M が proper でないときは, その超極限が元の距離空間と等長同型になるとは限らない. 例えば, 無限次元 Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ は $\omega\text{-}\lim_n(B, \|\cdot\|, o)$ と等長同形ではない. しかし, 同じ基点を持つ同じ距離空間の列の超極限は, もとの空間の等長埋め込みを持つことが知られている.

補題 6.3. 任意の点付き測地的距離空間の列の超極限もまた測地的距離空間である.

しかし, Busemann 非正曲率空間の列の超極限は, Busemann 非正曲率空間とは限らない. 例えば, $\mathbb{R}^2$ にノルム $\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ を入れた空間 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p, 0)$ は, $1 < p < \infty$ のとき Busemann 非正曲率空間である. このとき, $\omega\text{-}\lim_n(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{1+\frac{1}{n}}, 0)$ は $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ と等長同形となる. しかし, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ の最短測地線は一意ではない. したがって, 特に $\omega\text{-}\lim_n(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{1+\frac{1}{n}}, 0)$ は Busemann 非正曲率空間ではない.

7 Busemann 非正曲率空間に対する結果

この章では, 有限生成群の Busemann 非正曲率空間への等長作用に対する, 同変写像のエネルギーの振る舞いと固定点性質の関係について得られた結果を述べる. 5 章と同様に有限生成群 Γ , その生成元集合 S , weight m をとる.

定理 4.3 は性質 (F_B) が性質 (E_B) を導くというものであった. 次の定理は, その定理の逆に関する結果である.

定理 7.1. (N, d) を Busemann 非正曲率空間とし, $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(N, d)$ を準同形とする. Γ から N への ρ -同変写像の集合上のエネルギー汎関数を E_ρ で表す. $n \rightarrow \infty$ のとき $|\nabla - E_\rho|(f_n) \rightarrow 0$ となる ρ -同変写像の列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとる. もし定数 $C(\rho) > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|\nabla - E_\rho|(f_n)^2 \geq C(\rho)E_\rho(f_n)$$

となるならば, (N, d) 上に $\rho(\Gamma)$ -固定点が存在するか, または $(N_\omega, d_\omega) = \omega\text{-}\lim_n(N, d, f_n(e))$ 上に $\rho_\omega(\Gamma)$ -固定点が存在する. ただし, $\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルター ω は任意にとってよい.

$\mathcal{L}$ を距離空間の族とする. 任意の列 $\{(N_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, $\{r_n > 0\}_{n \in \mathbb{N}}$, $(o_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} N_n$ に対し, $\omega\text{-}\lim_n (N_n, r_n d_n, o_n) \in \mathcal{L}$ を満たす $\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルター ω が存在するならば, $\mathcal{L}$ は超極限について閉じているという.

次の定理は, 固定点性質 (FH) と性質 (EH) を Busemann 非正曲率空間に拡張した性質に関する結果である.

定理 7.2. $\mathcal{L}$ を超極限について閉じている Busemann 非正曲率空間からなる族とする. 任意の $(N, d) \in \mathcal{L}$ と任意の $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(N, d)$ に対し, $\rho(\Gamma)$ -固定点が存在すると仮定する. このとき, 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $(N, d) \in \mathcal{L}$, $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(N, d)$ と ρ -同変写像 $f : \Gamma \rightarrow N$ に対して,

$$|\nabla - E_{N, \rho}|(f)^2 \geq C E_{N, \rho}(f)$$

を満たす. ここで, $E_{N, \rho}$ は Γ から N への ρ -同変写像の集合上のエネルギー汎関数である. また, 定数 $C = C(\Gamma, \mathcal{L})$ は (N, d) , ρ , f のとり方によらない.

超極限について閉じている Busemann 非正曲率空間からなる族 $\mathcal{L}$ の例をいくつか挙げておく.

例 7.3. すべての点付き CAT(0) 空間からなる族は $\mathcal{L}$ の例である. また, すべての点付き Hilbert 空間からなる族も $\mathcal{L}$ の例である. しかし, すべての点付き Busemann 非正曲率空間からなる族は $\mathcal{L}$ の例ではない (補題 6.3 の下参照).

注意. CAT(0) 空間では, 定理 7.1 において超極限を取らなくても固定点が存在することが示せる ([IKN]). そのため, すべての点付き CAT(0) 空間からなる族では, 定理 7.2 の逆が成り立つ.

例 7.4. $(B, \|\cdot\|)$ を有限次元強凸 Banach 空間とする. 任意の $r > 0$ と $o' \in B$ に対し, $(B, \|\cdot\|, o)$ は $(B, r\|\cdot\|, o')$ と等長同形である. また, 有限次元 Banach 空間は proper である. ゆえに, 補題 6.2 より, $(B, \|\cdot\|)$ と等長同型な Banach 空間からなる族は $\mathcal{L}$ の例である.

例 7.5. $\delta : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ を, 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta(\epsilon) > 0$ かつ $\delta(0) = 0$ である左連続, 単調増加関数とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta_B(\epsilon) \geq \delta(\epsilon)$ を満たすすべての一様凸 Banach 空間 B からなる族 $\mathcal{L}_\delta$ は $\mathcal{L}$ の例である.

例 7.6. 任意に $k > 0$ を固定する. 以下の条件を満たす Busemann 非正曲率空間の族 $\mathcal{L}_k$ は $\mathcal{L}$ の例である: 任意の $(N, d) \in \mathcal{L}_k$ で, 任意の $p \in N$ と最短測地線 $c : [0, l] \rightarrow N$ に対し,

$$kd(p, c(t))^2 \leq (1-t)d(p, c(0))^2 + td(p, c(l))^2 - (1-t)td(c(0), c(l))^2$$

が $0 \leq t \leq l$ で成り立つ. $k = 1$ のとき, この条件は CAT(0) 空間の定義である. つまり, $\mathcal{L}_1$ はすべての CAT(0) 空間からなる族である. しかし, $k > 1$ に対して, この条件を満たす距離空間が Busemann 非正曲率空間になるかどうかについて筆者は知らない.

参考文献

- [BFGM07] U. BADER, A. FURMAN, T. GELANDER, AND N. MONOD, *Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces*, Acta Math. 198 (2007), no.1, 57–105.
- [BL00] Y. BENYAMINI AND J. LINDESTRAUSS, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [BH99] M. R. BRIDSON AND A. HAEFLIGER, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 319, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [BHV] B. BEKKA, P. DE LA HARPE AND A. VALETTE, *Kazhdan’s Property (T)*, Cambridge University Press, 2008.
- [Del77] P. DELORME, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus et représentations*. Bull. Soc. Math. France, 105 (1977), 281–336.
- [Gui72] A. GUICHARDET, *Sur la cohomologie des groupes topologiques II*, Bull. Soc. Math., 96 (1972), 305–332.
- [IKN] H. IZEKI, T. KONDO AND S. NAYATANI, *the fixed-point property of random groups*, preprint.
- [Jos97] J. JOST, *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [Kap01] M. KAPOVICH, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, 183. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [May98] U. F. MAYER, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. and Geom. 6 (1998), 199–253.
- [Pap05] A. PAPADOPOULOS, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, IRMA Lectures in Math. and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2005.
- [T] M. TANAKA, *The energy of equivariant maps and a fixed-point property for Busemann nonpositive curvature spaces*, preprint.
- [砂田] 砂田利一, *基本群とラプシアン*, 紀伊国屋書店, 1988.