Busemann非正曲率空間に対する固定点性質と同変写像のエネルギー

(The energy of equivariant maps and a fixed-point property for Busemann nonpositive curvature spaces)

田中 守　東北大学大学院理学研究科数学専攻D2
(Mamoru Tanaka　Mathematical Institute Tohoku University)

1. Kazhdanの性質(T)と固定点性質(FH)
2. Banach空間への同変写像のエネルギーと絶対勾配
3. Busemann非正曲率空間への同変写像のエネルギーと絶対勾配

1. Kazhdanの性質(T)と固定点性質(FH)

Γ : 有限生成群

S : Γの生成元集合 $(S = S^{-1},\ e \notin S)$

$(B, \|\ \|)$: Banach空間

$O(B)$: Bの線形等長変換群

準同型 $\rho_0 : \Gamma \to O(B)$ に対し,

$B' := B/\{v \in B : \rho_0(\gamma)v = v,\ \forall\gamma \in \Gamma\}$とする.

準同型 $\rho_0' : \Gamma \to O(B')$を, $\rho_0'(\gamma)[v] := [\rho_0(\gamma)v]$で定義する.

<u>定義</u>.(i) Γ が性質 (T_B) を持つとは，非自明な任意の準同形 $\rho_0 : \Gamma \to O(B)$ に対し，$C(\rho_0) > 0$ が存在し，任意の $[v] \in B'$ に対し

$$\max_{\gamma \in S} \| [v] - \rho_0'(\gamma)[v] \| \geq C(\rho_0) \| [v] \|$$

となることである.

(ii) Γ がKazhdanの性質 (T) を持つとは，任意のHilbert空間 H に対して，Γ が性質 (T_H) を持つことである.

<u>例</u>. (T): $SL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$, (T)を持たない: $\mathbb{Z}^n$, F_n .

- (Bader-Furman-Gelander-Monod) $1 < p < \infty$ に対し，$(T) \Leftrightarrow (T_{L_p([0,1])})$.

$\mathrm{Isom}(B)$: Bのアフィン等長変換群

<u>**定義**</u>.(i) Γ が性質 (F_B) を持つとは, 任意の準同形$\rho:\Gamma\to\mathrm{Isom}(B)$に対し, $\rho(\Gamma)$が固定点を持つことである.

(ii) Γ が固定点性質 (FH) を持つとは, 任意の実Hilbert空間Hに対して, Γ が性質 (F_H) を持つことである.

- (Guichardet, Delorme) $(FH) \Leftrightarrow (T)$.
- (B-F-G-M) Banach空間Bに対し, $(F_B) \Rightarrow (T_B)$.
- (B-F-G-M, Fisher-Margulis) Γに対して, $\epsilon > 0$ が存在し, $p\in(1,2+\epsilon)$に対し, $(T) \Rightarrow (F_{L_p([0,1])})$.
- 一般に$(T_B) \Rightarrow (F_B)$ ではない. 例: $\Gamma=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{R}$.

2. Banach空間への同変写像のエネルギーと絶対勾配

Γ : 有限生成群　S : Γの生成元集合 $(S = S^{-1},\ e \notin S)$

$(B, \|\ \|)$: Banach空間

準同形$\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(B)$に対し, 準同形$\rho_0 : \Gamma \to O(B)$ と

$o : \Gamma \to B$が存在し, $\rho(\gamma)v = \rho_0(\gamma)v + o(\gamma)$と表せる.

$B' := B/\{v \in B : \rho_0(\gamma)v = v,\ \forall\gamma \in \Gamma\}$.

$\rho_0' : \Gamma \to O(B')$を, $\rho_0'(\gamma)[v] := [\rho_0(\gamma)v]$で定義し,

$\rho' : \Gamma \to \mathrm{Isom}(B')$ を, $\rho'(\gamma)[v] := \rho_0'(\gamma)[v] + [o(\gamma)]$ で定義する.

$\mathcal{M}_{\rho'} := \{f : \Gamma \to B' : \rho'$-同変 i.e. $f(\gamma\alpha) = \rho'(\gamma)f(\alpha)\}$.

$\sum_{\gamma\in S} m(\gamma) = 1, m(\gamma) = m(\gamma^{-1})$ を満たす関数(weight) $m : S \to (0,1)$ を1つ固定する.

<u>定義</u>. エネルギー汎関数 $E_{\rho'} : \mathcal{M}_{\rho'} \to [0,\infty)$ を,

$$E_{\rho'}(f) := \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in S} m(\gamma)\|f(e) - f(\gamma)\|^2$$

で定義する.

- $E_{\rho'}(f) = 0 \Leftrightarrow f(e)$ は $\rho'(\Gamma)$ の固定点.

<u>定義</u>. $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ における $E_{\rho'}$ の絶対勾配 $|\nabla_{-}E_{\rho'}|(f)$ を

$$|\nabla_{-}E_{\rho'}|(f) := \max\left\{ \limsup_{g\to f,\ g\in\mathcal{M}_{\rho'}} \frac{E_{\rho'}(f) - E_{\rho'}(g)}{\|f(e) - g(e)\|}\ ,\ 0 \right\}$$

で定義する.

定義.(i) Γ が性質 (E_B) を持つとは，非自明な任意の準同形 $\rho:\Gamma\to \mathrm{Isom}(B)$ に対し，$C(\rho)>0$ が存在し，任意の $f\in\mathcal{M}_{\rho'}$ に対し

$$|\nabla_- E_{\rho'}|(f)^2 \geq C(\rho)E_{\rho'}(f)$$

となることである．

(i) Γ が性質 (EH) を持つとは，任意の実 Hilbert 空間 H に対し，Γ が性質 (E_H) を持つことである．

事実. $(EH)\Leftrightarrow(T)$ $(\Leftrightarrow (FH))$.

定理. (T.) Banach 空間 B に対して，$(F_B)\Rightarrow(E_B)$.

問. Banach 空間 B に対して，$(E_B)\Rightarrow(F_B)$ ？

<u>定義</u>. Γ が性質 $(E_B)'$ を持つとは, 線形部分 ρ_0 が非自明な任意の準同形 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(B)$ に対し, $C(\rho) > 0$ が存在し, 任意の $f \in \mathcal{M}_{\rho'}$ に対し

$$|\nabla_- E_{\rho'}|(f)^2 \geq C(\rho) E_{\rho'}(f)$$

となることである.

<u>命題</u>. (T.) Γ : 有限生成可換群

B : 一様凸で一様に滑らかなBanach空間

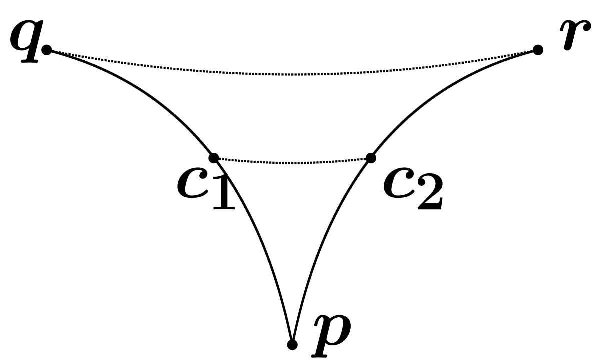
$(T_B) \Rightarrow (E_B)'$.

<u>注意</u>. 一般に $(E_B)' \Rightarrow (F_B)$ ではない.

3. Busemann非正曲率空間への同変写像のエネルギーと絶対勾配

定義. 完備な測地的距離空間(N,d)がBusemann非正曲率空間であるとは, 任意の3点$p,q,r\in N$に対して, pとq, pとrをそれぞれ結ぶ任意の最短測地線$c_i:[0,l_i]\to N\ (i=1,2)$に対し, $d(c_1(l_1/2),c_2(l_2/2))\le d(q,r)/2$が成り立つことである.

例. CAT(0) 空間 (Hilbert 空間, 完備非正曲率 Riemann 多様体, 木など), 一様凸 Banach 空間 $(L_p([0,1]))(1<p<\infty)$など).



Γ : 有限生成群

S : Γの生成元集合 $(S = S^{-1},\ e \notin S)$

(N, d) : Busemann非正曲率空間

$\mathrm{Isom}(N, d)$: Nの等長変換群

$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(N, d)$ 準同形

$$\mathcal{M}_\rho := \{f : \Gamma \longrightarrow N : \rho\text{-同変 i.e. } f(\gamma\alpha) = \rho(\gamma)f(\alpha)\}$$

とし, $f, g \in \mathcal{M}_\rho$に対し$d_{\mathcal{M}_\rho}(f, g) = d(f(e), g(e))$とする.

このとき, $f \mapsto f(e)$により$(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ と(N, d)を同一視できる.

weight $m : S \to (0,1)$ を固定する.

<u>定義</u>. エネルギー汎関数 $E_\rho : \mathcal{M}_\rho \to [0,\infty)$ を

$$E_\rho(f) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in S} m(\gamma) d(f(e), f(\gamma))^2$$

で定義する.

- $E_\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f(e)$ は $\rho(\Gamma)$ の固定点.
- E_ρ は $(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ 上で連続.
- (Jost) エネルギー汎関数 E_ρ は $(\mathcal{M}_\rho, d_{\mathcal{M}_\rho})$ の測地線に沿って凸である.

定義. $f \in \mathcal{M}_\rho$ における E_ρ の絶対勾配 $|\nabla_- E_\rho|(f)$ を

$$|\nabla_- E_\rho|(f) := \max\left\{ \limsup_{g\to f,\ g\in\mathcal{M}_\rho} \frac{E_\rho(f) - E_\rho(g)}{d_{\mathcal{M}_\rho}(f,g)}\ ,\ 0 \right\}$$

で定義する.

- (Mayer) $|\nabla_- E_\rho|(f) = 0$
  $\Leftrightarrow f \in \mathcal{M}_\rho$ が調和, つまり, $E_\rho(f) = \inf_{g\in\mathcal{M}_\rho} E_\rho(g)$.

補題. (T.) $\inf_{f\in\mathcal{M}_\rho} |\nabla_- E_\rho|(f) = 0$.

注意. CAT(0) 空間では, Jost や Mayer によって ($\mathcal{M}_\rho$ 上のエネルギーの) 勾配流が構成され, 絶対勾配はその勾配流のノルムである. しかし, Busemann 非正曲率空間では, この勾配流を構成できない.

<u>定理</u>. (T.) $\mathcal{L}$ を超極限について閉じているBusemann非正曲率空間からなる族とする.

任意の $(N, d) \in \mathcal{L}$ と任意の準同形 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(N, d)$ に対し, $\rho(\Gamma)$-固定点が存在する.

$\Rightarrow C > 0$ が存在して, 任意の $(N, d) \in \mathcal{L}$, 任意の $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(N, d)$ と任意の $f \in \mathcal{M}_{N,\rho}$ に対して,

$$|\nabla_{-} E_{N,\rho}|(f)^2 \geq C E_{N,\rho}(f)$$

が成り立つ. ただし, 定数 C は (N, d), ρ, f のとり方によらない.

超極限について閉じているBusemann非正曲率空間からなる族$\mathcal{L}$の例.

- **有限次元一様凸Banach空間$(B, \| \ \|)$と等長同型なBanach 空間からなる族**
- **$\delta : (0, 2] \longrightarrow (0, 1]$ を左連続, 単調増加関数としたとき, 凸率 δ_B が$\delta_B(\epsilon) \geq \delta(\epsilon)$ を満たすすべての一様凸Banach空間 B からなる族**
  特に, $\delta(\epsilon) = 1 - (1 - \epsilon^2/4)^{1/2}$のとき, これはすべてのHilbert空間からなる族

- $k > 0$ に対し, 以下を満たす Busemann 非正曲率空間の族 $\mathcal{L}_k$: 任意の $(N, d) \in \mathcal{L}_k$ において, 任意の $p \in N$, 任意の最短測地線 $c : [0, l] \to N$ と任意の $t \in (0, l)$ に対し,

$$(1-t)d(p,c(0))^2 + td(p,c(l))^2 - (1-t)td(c(0),c(l))^2 \geq kd(p,c(t))^2.$$

特に, $\mathcal{L}_1$ はすべての CAT(0) 空間からなる族

注意. すべての Busemann 非正曲率空間からなる族は $\mathcal{L}$ の例ではない.

注意. (井関-近藤-納谷) 超極限について閉じている CAT(0) 空間からなる族では, 定理の逆が成り立つ.

定理. (T.) (N,d) : Busemann非正曲率空間
$\rho:\Gamma\to\mathrm{Isom}(N,d)$: 準同形
$\lim_{n\to\infty}|\nabla_- E_\rho|(f_n)=0$となる$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}_\rho$をとる.
$C(\rho)>0$が存在して

$$|\nabla_- E_\rho|(f_n)^2\geq C(\rho)E_\rho(f_n)\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ (N,d)上に$\rho(\Gamma)$-固定点が存在するか, または,
$(N_\omega,d_\omega)=\omega\text{-}\lim_n(N,d,f_n(e))$上に$\rho_\omega(\Gamma)$-固定点が存在する. ただし, $\mathbb{N}$上の非単項超フィルターωは任意にとってよい.