

# 令和 8 年度 専攻科前期学力選抜試験

受験番号

氏名

模範解答

総得点

## 数学 (4 の 1)

(問 1) 極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x}$  を求めよ. (配点 5 点)

問 1 (得点)

$$\text{解) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{\frac{1 - \tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{\tan x (1 - \tan^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan^2 x} = \underline{2}$$

$$\text{別解) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan 2x)'}{(\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 2x} = \underline{2}$$

(問 2)  $y = \log |\log x|$  ( $x \neq 1$ ) を微分せよ. (配点 4 点)

問 2 (得点)

$$\text{解) } y' = \frac{d}{dx} (\log |\log x|) = \frac{1}{\log x} \times (\log x)' = \frac{1}{x \log x}$$

(問 3)  $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  とするとき,  $\alpha^{20}$  の実部と虚部を求めよ. (配点 5 点)

問 3 (得点)

解)  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$  より, ド・モアブルの公式を用いると,

$$\alpha^{20} = \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{20} = \cos \left( \frac{\pi}{4} \times 20 \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \times 20 \right) = \cos 5\pi + i \sin 5\pi = -1 + 0 \times i = -1$$

よって,  $\alpha^{20}$  の 実部は -1, 虚部は 0 である.

(問 4) べき級数  $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  が収束する  $x$  の範囲を定め, 和を求めよ. (配点 4 点)

問 4 (得点)

解) 公比  $-x^2$  の等比級数なので,  $|-x^2| < 1$ , すなわち,  $|x| < 1$  のときに限り収束し, その和は

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (|x| < 1)$$

(問 5)  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  の点  $(1, \sqrt{2}, 1)$  における接平面の方程式を求めよ. (配点 7 点)

問 5 (得点)

解)  $z_x = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ ,  $z_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$  となるから,  $x = 1, y = \sqrt{2}$  のとき,

$$z_x(1, \sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{4 - 1 - 2}} = -1, \quad z_y(1, \sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 1 - 2}} = -\sqrt{2}$$

よって, 求める接平面の方程式は,

$$z - 1 = -(x - 1) - \sqrt{2}(y - \sqrt{2})$$

となる. 求める接平面方程式は

$$\underline{x + \sqrt{2}y + z = 4}$$

# 令和 8 年度 専攻科前期学力選抜試験

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

## 数学 (4 の 2)

(問 6) 不定積分  $\int x(x^2 + e^x) dx$  を求めよ. (配点 5 点)

問 6 (得点)

解)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \int (x^3 + xe^x) dx = \int x^3 dx + \int xe^x dx \\
 &= \frac{1}{4}x^4 + xe^x - \int 1 \cdot e^x dx \\
 &= \frac{1}{4}x^4 + xe^x - e^x + C \\
 \therefore \int x(x^2 + e^x) dx &= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 + xe^x - e^x + C}} \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(問 7) 曲線  $y = -x^2$  と  $y = x - 2$  で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ. (配点 8 点)

問 7 (得点)

解)  $y = -x^2$  と  $y = x - 2$  の共有点は  $-x^2 = x - 2$  の解が  $x = -2, 1$  より,  $(x, y) = (-2, -4), (1, -1)$  と求まる.

$-2 \leq x \leq 1$  の範囲で  $-x^2 \geq x - 2$  であることから, 図形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 \{-x^2 - (x - 2)\} dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2} \\
 \therefore S &= \underline{\underline{\frac{9}{2}}}
 \end{aligned}$$

(問 8)  $D$  が ( ) 内の不等式で表す領域であるとき, 次の 2 重積分の値を求めよ.

問 8 (得点)

(1)  $\iint_D \sin x^2 dx dy$  ( $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq x$ ) (配点 5 点)

解)

$$\text{与式} = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^x \sin x^2 dy \right\} dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} [(\sin x^2)y]_0^x dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$$

ここで,  $t = x^2$  とおくと  $dt = 2x dx$ ,  $\frac{x}{t} \Big|_0^{\sqrt{\pi}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$  より,

$$\text{与式} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{2} [-\cos t]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = 1$$

$$\therefore \iint_D \sin x^2 dx dy = \underline{\underline{1}}$$

(2)  $\iint_D (x^2 - 4y^2) dx dy$  ( $0 \leq x + 2y \leq 1, 0 \leq x - 2y \leq 2$ ) (配点 7 点)

解)  $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - 2y \end{cases}$  とおくと,  $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{4} \end{cases}$  となる. これより,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \quad \dots \text{①}, \quad D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\} \quad \dots \text{②}$$

$$\begin{aligned}
 \text{①, ② より, 与式} &= \iint_D (x + 2y)(x - 2y) dx dy = \iint_D uv |J(u, v)| du dv \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left( \int_0^2 uv dv \right) du = \frac{1}{4} \left( \int_0^1 u du \right) \left( \int_0^2 v dv \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \iint_D (x^2 - 4y^2) dx dy = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

# 令和 8 年度 専攻科前期学力選抜試験

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

## 数学 (4 の 3)

(問 9)  $y = y(t)$  について以下の問いに答えよ。

問 9 (得点)

(1) 微分方程式  $\frac{dy}{dt} = (2t-1)(y-1)$ ,  $y(0) = -1$  を満たす特殊解を求めよ。 (配点 6 点)

解)  $y(0) = -1$  より,  $y(t) \neq 1$  である。よって, 両辺を  $y-1$  で割り, 両辺  $t$  について積分すると

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int (2t-1) dt \iff \log|y-1| = t^2 - t + C' \quad \text{より} \quad y-1 = Ce^{t^2-t} \quad (C = \pm e^{C'})$$

これより  $y = 1 + Ce^{t^2-t}$  ( $C$  は任意定数),  $y(0) = -1$  より  $-1 = 1 + C$  となり,  $C = -2$

$$\therefore \underline{y(t) = 1 - 2e^{t^2-t}}$$

(2) 微分方程式  $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4t$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$  を満たす特殊解を求めよ。 (配点 6 点)

解)  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$  とおき, 両辺をラプラス変換すると

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{4}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{-4}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

ただし,  $c_1 = -\frac{4(2s-3)}{(s^2-3s+2)^2} \Big|_{s=0} = 3$

$$\therefore \underline{y(t) = 3 + 2t - 4e^t + e^{2t}}$$

別解)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  の一般解は  $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$  となる。一つの解を  $y = A + Bt$  と予想し, 微分方程式を満たすように  $A, B$  を定めると,  $A = 3, B = 2$  と定まり, 一つの解は  $y = 3 + 2t$  となる。これより, 一般解は

$$y(t) = 3 + 2t + C_1e^t + C_2e^{2t}$$

$y(0) = y'(0) = 0$  の条件から,  $C_1 + C_2 = -3, C_1 + 2C_2 = -2$  の連立方程式が得られ, これより  $C_1 = -4, C_2 = 1$  となる。

$$\therefore \underline{y(t) = 3 + 2t - 4e^t + e^{2t}}$$

(3) 微分方程式  $t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 3t\frac{dy}{dt} + 3y = 0$  の一般解を求めよ。 (配点 6 点)

解) 解を  $y = t^\alpha$  と予想し, 与えられた微分方程式を満たすように  $\alpha$  を定めればよい。

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 3t\frac{dy}{dt} + 3y = t^2 \cdot \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - 3t \cdot \alpha t^{\alpha-1} + 3t^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 3)t^\alpha = 0 \iff (\alpha-1)(\alpha-3) = 0 \quad \therefore \alpha = 1, 3 \quad \text{これより } t, t^3 \text{ は解であり, 求める一般解は}$$

$$\underline{y(t) = C_1t + C_2t^3} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(問 10) 微分方程式  $\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 2y = 6te^t$  の一般解を求めよ。 (配点 7 点)

問 10 (得点)

解)  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ ,  $y(0) = a, y'(0) = b, y''(0) = c$  とおき, 両辺ラプラス変換すると

$$(s^3 - 4s^2 + 5s - 2)Y(s) = \frac{6}{(s-1)^2} + \varphi(a, b, c, s) \quad (\varphi(a, b, c, s) \text{ は } a, b, c \text{ を含む } s \text{ の 2 次式})$$

$P(s) = s^3 - 4s^2 + 5s - 2$  とおくと,  $P(1) = 0$  なので, 右の組み立て除法より

$$(s-1)^2(s-2)Y(s) = \frac{6}{(s-1)^2} + \varphi(a, b, c, s) \quad \text{より}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s-1)^4(s-2)} + \frac{\varphi(a, b, c, s)}{(s-1)^2(s-2)}$$

$$= \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{(s-1)^2} + \frac{C_3}{s-2} + \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{-6}{(s-1)^4}, \quad \text{ただし, } c_1 = -\frac{6}{(s-2)^2} \Big|_{s=1} = -6$$

$$\therefore \underline{y(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t} - 3t^2e^t - t^3e^t} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数})$$

# 令和 8 年度 専攻科前期学力選抜試験

受験番号

氏名

模範解答

## 数学 (4 の 4)

(問 1 1)  $\vec{a} = (1, k+2)$ ,  $\vec{b} = (k+1, k+5)$  が平行となるように実数  $k$  の値を定めよ。 (配点 6 点)

問 1 1 (得点)

解)  $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = m\vec{a} \Leftrightarrow (k+1, k+5) = m(1, k+2) \Leftrightarrow (k+1, k+5) = (m, m(k+2))$  なので、

$$\begin{cases} k+1 = m & \dots \textcircled{1} \\ k+5 = m(k+2) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より  $m = k+1$  なので、② に代入すると、 $k+5 = (k+1)(k+2)$  より、 $k+5 = k^2 + 3k + 2$   
整理すると  $k^2 + 2k - 3 = 0$  となる。  $(k+3)(k-1) = 0$  より  $\underline{k = 1, -3}$

(問 1 2)  $\vec{a} = (1, -2, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -4)$  のとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の両方に直交する単位ベクトルを求めよ。  
(配点 6 点)

問 1 2 (得点)

解) 求めるベクトルを  $\vec{x} = (x, y, z)$  とおくと、

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = (1, -2, 2) \cdot (x, y, z) = x - 2y + 2z = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{x} = (1, 1, -4) \cdot (x, y, z) = x + y - 4z = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

② - ① から  $3y - 6z = 0$  より、 $y = 2z$  となる。① に代入すると  $x - 2(2z) + 2z = 0$  より、 $x = 2z$   
よって  $z = c$  とおくと、 $(x, y, z) = (2c, 2c, c) = c(2, 2, 1)$  であり  $|(2, 2, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$   
したがって、求める単位ベクトルは  $\underline{\pm \frac{1}{3}(2, 2, 1)}$

(問 1 3) 行列  $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  について、以下の問いに答えよ。

問 1 3 (得点)

(1)  $A$  の固有値をすべて求めよ。 (配点 6 点)

$$\begin{aligned} \text{解) } |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 6 + 0 - 0 - 6\lambda + 2(1-\lambda) \\ &= -\lambda(6-7\lambda+\lambda^2) + 6 - 6\lambda + 2 - 2\lambda = -6\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 + 8 - 8\lambda \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8) \end{aligned}$$

$\lambda = 1$  のとき、 $1^3 - 7 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8 = 0$  なので、右の組み立て除法より

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -7 & 14 & -8 \\ & & 1 & -6 & 8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \underline{0} \end{array}$$

したがって、 $\underline{\lambda = 1, 2, 4}$

(2)  $A$  の固有値に対する固有ベクトルをどれか 1 つ求めよ。ただし、どの固有値に対する固有ベクトルか分かるように書くこと。 (配点 7 点)

解)  $\lambda = 1$  のときの固有ベクトルを  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  とおくと、

$$(A - 1 \cdot E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y-z \\ -2x+z \\ 2x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} 5x+3y-z=0 & \dots \textcircled{1} \\ -2x+z=0 & \dots \textcircled{2} \\ 2x-z=0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

② より  $z = 2x$  なので① に代入すると、 $5x + 3y - 2x = 0$ ,  $3x = -3y$ ,  $x = -y$ .

$y = c_1$  とおくと  $x = -c_1$ ,  $z = 2x = 2(-c_1) = -2c_1$ . したがって、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = \underline{c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad (c_1 \neq 0) \quad \left( \lambda = 2 \text{ のとき } c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (c_2 \neq 0), \lambda = 4 \text{ のとき } c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (c_3 \neq 0) \right)$$