

# 令和 8 年度 専攻科後期学力選抜試験

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

総得点

## 数学 (4 の 1)

(問 1) 次の極限值を求めよ.

問 1 (得点)

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$  (配点 3 点)

解)  $\frac{1}{y} = \frac{3}{x}$  とおくと,  $x = 3y$  より,  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $y \rightarrow \infty$  である. よって,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2 \times 3y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right\}^6 = e^6$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^2}$  (配点 4 点)

解)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \cos \pi x)'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-\pi \sin \pi x)'}{(2(x-1))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

(問 2) すべての実数  $x$  について,  $e^{3x} \geq 3x + 1$  が成り立つことを証明せよ. (配点 6 点)

問 2 (得点)

解)  $y = e^{3x} - 3x - 1$  とおくと,

$$y' = 3e^{3x} - 3 = 3(e^{3x} - 1) \text{ より, } y' = 0 \iff x = 0$$

$x$	$\dots$	$0$	$\dots$
$y'$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$

増減表をかくと右図のようになる. よって  $x = 0$  のとき, 最小値  $0$  をとる.  $y = e^{3x} - 3x - 1 \geq 0$  より,  $e^{3x} \geq 3x + 1$ .

(問 3)  $z = x^2 \log y$ ,  $x = u + 2v$ ,  $y = 3uv$  とするとき,  $z_u, z_v$  を  $u, v$  の式で簡易化して求めよ. (配点 6 点)

問 3 (得点)

解)  $z_x = 2x \log y$ ,  $z_y = \frac{x^2}{y}$ ,  $x_u = 1$ ,  $x_v = 2$ ,  $y_u = 3v$ ,  $y_v = 3u$ . よって,

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = 2x \log y \times 1 + \frac{x^2}{y} \times 3v = 2(u+2v) \log(3uv) + \frac{(u+2v)^2}{3uv} \times 3v = \frac{(u+2v) \left( 2 \log(3uv) + \frac{u+2v}{u} \right)}{1}$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = 2x \log y \times 2 + \frac{x^2}{y} \times 3u = 4(u+2v) \log(3uv) + \frac{(u+2v)^2}{3uv} \times 3u = \frac{(u+2v) \left( 4 \log(3uv) + \frac{u+2v}{v} \right)}{1}$$

(問 4) 曲面  $xyz = 8$  について, 曲線上の点  $P(x_0, y_0, z_0)$  における接平面の方程式を求めよ.

問 4 (得点)

ただし,  $x_0, y_0, z_0$  は定数である. (配点 6 点)

解)  $f(x, y, z) = xyz - 8$  とおく.  $f_x = yz$ ,  $f_y = xz$ ,  $f_z = xy$  より,

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = y_0 z_0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = x_0 z_0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = x_0 y_0.$$

$x_0 y_0 z_0 = 8$  に注意して, 接平面の方程式を考えると,

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0 \iff y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z - 3x_0 y_0 z_0 = 0 \text{ より,}$$

$$\underline{y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 24}$$

# 令和 8 年度 専攻科後期学力選抜試験

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

## 数学 (4 の 2)

(問 5) 不定積分  $\int \frac{\sqrt{x^2+1}+x^2}{x\sqrt{x^2+1}} dx$  を求めよ。 (配点 5 点)

問 5 (得点)

解)

$$\text{与式} = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log|x| + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

ここで、 $t = x^2 + 1$  とおくと  $dt = 2x dx$  より、

$$\text{与式} = \log|x| + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \log|x| + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \log|x| + \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \log|x| + \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x^2+1}+x^2}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \underline{\log|x| + \sqrt{x^2+1} + C} \quad (C \text{ は積分定数})$$

(問 6) 曲線  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) の長さ  $\ell$  を求めよ。 (配点 7 点)

問 6 (得点)

解)

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{-2}^2 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-2}^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx \quad (\because \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ は偶関数}) \\ &= [e^x - e^{-x}]_0^2 = e^2 - e^{-2} \end{aligned}$$

$$\therefore \ell = \underline{e^2 - e^{-2}}$$

(問 7)  $D$  が ( ) 内の不等式で表す領域であるとき、次の 2 重積分の値を求めよ。

問 7 (得点)

(1)  $\iint_D \log x dx dy$  ( $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x$ ) (配点 5 点)

解)

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_1^2 \left\{ \int_0^x \log x dy \right\} dx = \int_1^2 [(\log x)y]_0^x dx = \int_1^2 x \log x dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \log 2 - \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \log 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \iint_D \log x dx dy = \underline{2 \log 2 - \frac{3}{4}}$$

(2)  $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$  ( $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ) (配点 8 点)

解)  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  とおくと、 $D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\}$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \iint_D \frac{r}{r^2+1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{r}{r^2+1} dr = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2r}{r^2+1} dr \right) \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \log(r^2+1) \right]_0^2 = \pi \log 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \underline{\pi \log 5}$$

# 令和 8 年度 専攻科後期学力選抜試験

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

## 数学 (4 の 3)

(問 8)  $y = y(t)$  について以下の問いに答えよ.

問 8 (得点)

(1) 微分方程式  $\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$  ( $k$  は実数) の一般解を求めよ. (配点 6 点)

- 解) (i)  $k = 0$  のとき,  $y'' = 0$  より  $y' = C_1$  となる. よって,  $y(t) = C_1t + C_2$  ( $k = 0$  のとき)  
 (ii)  $k > 0$  のとき,  $\lambda^2 + k = 0$  より  $\lambda = \pm\sqrt{-k} = \pm\sqrt{ki}$  となる. よって,  $y(t) = C_1 \cos \sqrt{kt} + C_2 \sin \sqrt{kt}$  ( $k > 0$  のとき)  
 (iii)  $k < 0$  のとき,  $\lambda^2 + k = 0$  より  $\lambda = \pm\sqrt{-k}$  となる. よって,  $y(t) = C_1 e^{\sqrt{-k}t} + C_2 e^{-\sqrt{-k}t}$  ( $k < 0$  のとき)  
 ただし,  $C_1, C_2$  は任意定数

(2) 微分方程式  $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2te^{2t}$  の一般解を求めよ. (配点 6 点)

解)  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ ,  $y(0) = a$ ,  $y'(0) = b$  とおき, 両辺をラプラス変換すると

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{2}{(s-2)^2} + \varphi(a, b, s) \quad (\varphi(a, b, s) \text{ は } a, b \text{ を含む } s \text{ の 1 次式})$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)(s-2)^3} + \frac{\varphi(a, b, s)}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s-2} + \frac{c_1}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s-2)^3}, \quad c_1 = -\frac{2}{(s-1)^2} \Big|_{s=2} = -2$$

$$\therefore y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 2te^{2t} + t^2 e^{2t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(3) 積分方程式  $y(t) = 2 \int_0^t y(\tau) e^{t-\tau} d\tau + 4t^2 e^t$  を解け. (配点 6 点)

解)  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$  とおき, 両辺をラプラス変換すると

$$Y(s) = 2Y(s) \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{8}{(s-1)^3} \iff \left(1 - \frac{2}{s-1}\right)Y(s) = \frac{8}{(s-1)^3}$$

$$\frac{s-3}{s-1}Y(s) = \frac{8}{(s-1)^3} \quad \text{よ} \quad Y(s) = \frac{8}{(s-3)(s-1)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{c_1}{s-1} + \frac{-4}{(s-1)^2}, \quad c_1 = -\frac{8}{(s-3)^2} \Big|_{s=1} = -2$$

$$\therefore y(t) = 2e^{3t} - 2e^t - 4te^t$$

(問 9)  $x = x(t), y = y(t)$  に対して, 以下の連立微分方程式を解け. (配点 7 点)

問 9 (得点)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x, \quad x(0) = 0, y(0) = -1 \end{cases}$$

解)  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ ,  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$  とおき, 両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s) = 2X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - (-1) = Y(s) - 2X(s) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ここで,  $\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = (s-2)(s-1) - 6 = s^2 - 3s - 4 = (s-4)(s+1)$  より, クラメル公式から

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix}}{(s-4)(s+1)} = \frac{3}{(s-4)(s+1)} = \frac{\frac{3}{5}}{s-4} + \frac{\frac{3}{5}}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{(s-4)(s+1)} = \frac{-s+2}{(s-4)(s+1)} = \frac{-\frac{2}{5}}{s-4} + \frac{\frac{3}{5}}{s+1}$$

$$\therefore x(t) = \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t}, \quad y(t) = -\frac{2}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t}$$

# 令和 8 年度 専攻科後期学力選抜試験

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

## 数学 (4 の 4)

(問 1 0) 次の方程式で表される 2 直線のなす角を求めよ。 (配点 5 点)

$$\frac{x+3}{6} = \frac{y+4}{2\sqrt{2}} = \frac{z-4}{-2}, \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-\sqrt{2}} = z-1$$

解) 2 直線それぞれの方向ベクトル  $\vec{v}_1 = (6, 2\sqrt{2}, -2)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, -\sqrt{2}, 1)$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{6 \cdot (-1) + 2\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + (-2) \cdot 1}{\sqrt{6^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{-6 - 4 - 2}{\sqrt{36 + 8 + 4} \cdot \sqrt{1 + 2 + 1}} \\ &= \frac{-12}{\sqrt{48} \cdot \sqrt{4}} = \frac{-12}{4\sqrt{3} \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって、 $\theta = \frac{5}{6}\pi > \frac{\pi}{2}$  なので、2 直線のなす角は  $\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

問 1 0 (得点)

(問 1 1) 次の方程式で表される球の中心と半径を求めよ。 (配点 5 点)

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2x - 4y + 2z + 4 = 0$$

解)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 4z + 8 = 0$  より、 $(x^2 - 4x) + (y^2 - 8y) + (z^2 + 4z) = -8$

$(x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 + (z+2)^2 - 4 = -8$  と変形でき、整理すると

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 16$$

よって、中心  $(2, 4, -2)$ , 半径  $4$

問 1 1 (得点)

(問 1 2) 行列  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$  の階数を求めよ。 (配点 5 点)

解) 行基本変形を行うと  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$  より、 $1-x^2=0$  かどうかで階数が決まる。

$1-x^2 = -(x^2-1) = -(x-1)(x+1)$  より、 $x=1, -1$  のとき階数 1,  $x \neq 1, -1$  のとき階数 2

問 1 2 (得点)

(問 1 3) 3 つのベクトル  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  から作られる平行六面体の体積を求めよ。 (配点 4 点)

解)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 1 + 2 - 3 - 6 = -11$ . よって、体積は  $|-11| = 11$

問 1 3 (得点)

(問 1 4)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値, 固有ベクトルを求めよ。 (配点 6 点)

解)  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot (-1) = 8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1$   
 $= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$

よって、固有値は  $\lambda = 3$

固有ベクトルを  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とおくと、 $(A - 3E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

よって、 $-x+y=0$ ,  $y=x$ .  $x=c$  とおくと  $y=c$  なので、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (c \neq 0)$

問 1 4 (得点)